СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ, НОРМАЛЬНАЯ ФОРМА СИСТЕМЫ.

1.ТЕОРЕМА СУЩЕСТВОВАНИЯ И ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ

Рассмотрим следующую систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x_1} = a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + \ldots + a_{1n}(t)x_n + f_1(t), \\ \dot{x_2} = a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + \ldots + a_{2n}(t)x_n + f_2(t), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dot{x_n} = a_{n1}(t)x_1 + a_{n2}(t)x_2 + \ldots + a_{nn}(t)x_n + f_n(t), \end{cases} \tag{1}$$

где $a_{ij}(t)$, $f_i(t)$ непрерывные функции, определенные на интервале (a, b), $(-\infty \leq a < b \leq +\infty)$. Эта система называется нормальной формой системы линейных ОДУ n-го порядка;

Она называется однородной, если все $f_i(t) \equiv 0$ на (a, b), и неоднородной в противном случае.

Эту систему в векторной форме можно написать следующим образом Введем обозначения

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix},$$

$$A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \ldots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \ldots & a_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \ldots & a_{nn}(t) \end{pmatrix}$$

Теперь систему (1) можем написать в следующем виде

$$\dot{x} = A(t)x + f(t). \tag{2}$$

Рассмотрим для системы (1) задачу Коши с начальным условием

$$x(t_0) = x^0, \tag{3}$$

где $t_0 \in (a, b)$, $x^0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0) \in \mathbf{R}^n$.

Имеет место следующая теорема существования и единственности решения задачи Коши для системы (1).

Теорема 1. Пусть $a_{ij}(t), f_i(t) \in C(a,b)$. Тогда при любом начальном условии (3) задача Коши (1), (3) имеет и притом единственное решение $\phi(t) = (\phi_1(t), ..., \phi_n(t))$, определенное на всем промежутке (a,b).

Сначала рассмотрим однородные системы.

2. ОДНОРОДНЫЕ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ ОДУ

Рассмотрим однородную систему линейных ОДУ n-го порядка

$$\dot{x} = A(t)x, \tag{4}$$

Напомним, что $A(t) = (a_ij(t))$ Ц- $n \times n$ Ц матрица и $a_{ij}(t) \in C(a,b)$.

Утверждение 1. Множество вещественных (комплексных) решений системы (8) образуют вещественное (комплексное) линейное пространство.

Доказательство. Надо показать, что для любых двух решений x^1 и x^2 системы (4) их линейная комбинация $\alpha x^1 + \beta x^2$ также является решением системы (4) ($\alpha, \beta \in \mathbf{R}$, если рассматривается множество вещественных решений и $\alpha, \beta \in \mathbf{C}$, если рассматривается множество комплексных решений).

Пусть

$$\dot{x^1} = A(t)x^1, \quad \dot{x^2} = A(t)x^2,$$

тогда

$$\frac{d}{dt}(\alpha x^1 + \beta x^2) = \alpha \dot{x^1} + \beta \dot{x^2} = \alpha A(t)x^1 + \beta A(t)x^2 = A(t)(\alpha x^1 + \beta x^2).$$

Утверждение 1 доказано.

Далее будем изучать свойства вещественных решений системы (4) (для комплексных решений все свойства сохраняются, доказательства не меняются).

Утверждение 2. Если в некоторой точке $t_0 \in (a,b)$ решение системы (4) $x = \varphi$ принимает нулевое значение ($\varphi(t_0) = 0$), то $\varphi \equiv 0$ на (a,b).

Доказательство. Заметим, что $x \equiv 0$ является решением задачи Коши

$$\begin{cases} \dot{x} = A(t)x, \\ x(t_0) = 0, \end{cases}$$

а в силу единственности решения задачи Коши других решений быть не может, следовательно, $\varphi \equiv 0$ на (a,b). Утверждение 2 доказано.

Определение 2. Вектор-функции $\varphi^1,...,\varphi^m$: $(a,b) \to \mathbf{R}^n$ называются линейно зависимыми на (a,b), если существуют вещественные числа $\alpha_1,...,\alpha_m$ не все равные нулю, такие, что при всех $t \in (a,b)$

$$\alpha_1\varphi^1(t) + ... + \alpha_m\varphi^m(t) \equiv 0.$$

В противном случае вектор-функции $\varphi^1(t),...,\varphi^m(t)$ называются линейно независимыми на (a,b).

Пример 1. Даны вектор-функции

$$\phi^1(t) = (2,t), \quad \phi^2(t) = (t,1), \quad \phi^3(t) = (t-2, 1-t).$$

Показать, что они линейно зависимы при $t \in (-\infty,+\infty)$.

Составим линейную комбинацию этих вектор-функций и приравняем нулевой вектор-функции:

$$\alpha_1(2,t) + \alpha_2(t,1) + \alpha_3(t-2,1-t) = (0,0)$$

или

$$(2\alpha_1 + \alpha_2 t + \alpha_3 t - 2\alpha_3, \alpha_1 t + \alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_3 t) = (0,0),$$

откуда

$$\begin{cases} 2\alpha_1 + \alpha_2 t + \alpha_3 t - 2\alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 t + \alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_3 t = 0 \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} 2(\alpha_1 - \alpha_3) + (\alpha_2 + \alpha_3)t = 0 \\ \alpha_2 + \alpha_3 + (\alpha_1 - \alpha_3)t = 0 \end{cases}$$

Эта система будет совместна при любом $t \in (-\infty,+\infty)$, если

$$\alpha_1 = \alpha_3, \alpha_2 = -\alpha_3.$$

Полагаем $\alpha_3 = 1$, тогда $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = -1$, и мы получаем нетривиальную линейную комбинацию вектор-функций $\varphi^1(t), \varphi^2(t), \varphi^3(t)$, равную нулевой вектор-функции:

$$\varphi^1(t) - \varphi^2(t) + \varphi^3(t) \equiv 0, \quad t \in (-\infty,+\infty).$$

Следовательно, эти вектор-функции линейно зависимы на $(-\infty,+\infty)$.

Пример 2. Рассмотрим функции $sint$, $cost$. Показать, что они линейно независимы при $t \in (-\infty, +\infty)$.

Рассмотрим линейную комбинацию этих функций и приравняем ее нулю:

$$\alpha_1 sint + \alpha_2 cost = 0$$

Поставим значение $t = \frac{\pi}{2}$ в это равенство и получим $\alpha_1 = 0$ Поставим значение $t = 0$ в это равенство и получим $\alpha_2 = 0$. Следовательно,$\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 0$. Это значит,что функции $sint$, $cost$ линейно независимы на $(-\infty, +\infty)$.

Пример 3. Даны вектор-функции

$$\phi^1(t) = (2, e^t), \quad \phi^2(t) = (e^{2t}, 1).$$

Показать, что они линейно независимы при $t \in (-\infty, +\infty)$.

Составим линейную комбинацию этих вектор-функций и приравняем нулевой вектор-функции:

$$\alpha_1(2, e^t) + \alpha_2(e^{2t}, 1) = (0, 0)$$

откуда

$$\begin{cases} 2\alpha_1 + \alpha_2 e^{2t} = 0 \\ \alpha_1 e^t + \alpha_2 = 0 \end{cases}$$

Эта система будет совместна при любом $t \in (-\infty, +\infty)$. При $t = 0$ получим

$$\begin{cases} 2\alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \end{cases}$$

Эта система имеет тривиальное решение $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 0$. Следовательно, эти вектор-функции линейно независимы на $(-\infty, +\infty)$.

Утверждение 3. Любые $(n+1)$ решений системы (4) линейно зависимы на (a, b).

Доказательство. Пусть $x^1(t), ..., x^{n+1}(t)$ решения системы (4) на (a, b). Зафиксируем $t = t_0 \in (a, b)$. Тогда векторы $x^1(t_0), ..., x^{n+1}(t_0)$ составляет семейство из $(n+1)$ векторов n–мерного линейного пространства $\mathbf{R^n}$, а следовательно, они линейно зависимы, то есть существуют числа $\alpha_1, ..., \alpha_{n+1}$, не все равные нулю, такие, что

$$\alpha_1 x^1(t_0) + ... + \alpha_{n+1} x^{n+1}(t_0) = 0$$

Рассмотрим вектор-функцию

$$\varphi(t) = \alpha_1 x^1(t) + ... + \alpha_{n+1} x^{n+1}(t)$$

Она является решением однородной системы (4) как линейная комбинация решений этой системы и при $t = t_0$ принимает нулевое значение: $\varphi(t_0) = 0$. Следовательно, по утверждению 2 $\varphi(t) \equiv 0$ на (a, b), что и означает линейную зависимость вектор-функций $x^1(t), ..., x^{n+1}(t)$ на промежутке (a, b).

Утверждение 3 доказано.

Утверждение 4. Система (4) имеет n линейно независимых решений на (a, b).

Доказательство. Пусть $x^1(t), ..., x^n(t)$ – решения системы (4), удовлетворяющих следующим начальным условиям:

$$x^1(t_0) = (1, 0, ..., 0), \quad x^2(t_0) = (0, 1, ..., 0), ..., x^n(t_0) = (0, 0, ..., 1),$$

где $t_0 \in (a, b)$ (в силу теоремы 1 такие решения существуют). Составим их линейную комбинацию и приравняем ечъ к нулевой вектор-функции:

$$\alpha_1 x^1(t) + ... + \alpha_n x^n(t) = 0, \quad t \in (a, b).$$

Подставим $t = t_0$:

$$\alpha_1 x^1(t_0) + ... + \alpha_n x^n(t_0) = 0,$$

то есть

$$\alpha_1(1, 0, ..., 0) + \alpha_2(0, 1, ..., 0) + ... + \alpha_n(0, 0, ..., 1) = (0, 0, ..., 0).$$

Отсюда $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n = 0$. Утверждение 4 доказано.

Из утверждений 3 и 4 вытекает теорема.

Теорема 2. Размерность пространства решений однородной системы линейных ОДУ n-го порядка равна n.

Определение 3. Любые n линейно независимых и упорядоченных решений однородной системы линейных ОДУ n-го порядка называются фундаментальной системой решений (ФСР) этой системы ОДУ.

Известно, что в n-мерном линейном пространстве любые n линейно независимых и упорядоченных элементов образуют базис. Следовательно, ФСР является базисом в пространстве решений однородной системы линейных ОДУ. Из определения базиса вытекает теорема об общем решении однородной системы линейных ОДУ.

Теорема 3. Пусть вектор-функции $x^1(t), ..., x^n(t)$ образуют ФСР системы (4), тогда общее решение этой системы есть

$$X(t) = C_1 x^1(t) + ... + C_n x^n(t), \tag{5}$$

где $C_1, ..., C_n$ - произвольные вещественные постоянные.

Определение 4. Матрица $X(t)$, столбцами которой являются вектор- функциии ФСР :

$$X(t) = (x^1(t) ... x^n(t))$$

называется фундаментальной матрицей системы (4).

С помощью фундаментальной матрицы формулу (5) для общего решения системы (4) можно переписать в векторной форме:

$$x(t) = X(t) \cdot C, \tag{6}$$

где $C = \begin{pmatrix} C_1 \\ \vdots \\ C_n \end{pmatrix}$, $C_i \in \mathbf{R}$.

Утверждение 5. Определитель фундаментальной матрицы не обращается в нуль ни в одной точке промежутка (a, b).

Доказательство. Будем доказывать от противного. Пусть существует $t_0 \in (a, b)$, такое, что $det X(t_0) = 0$. Но определитель матрицы равен нулю тогда и только тогда, когда его столбцы линейно зависимы, следовательно, $x^1(t_0), ..., x^n(t_0)$ линейно зависимы, а тогда существуют числа $\alpha_1, ..., \alpha_n$, не все равные нулю, такие, что

$$\alpha_1 x^1(t_0) + ... + \alpha_n x^n(t_0) = 0.$$

Введем вектор-функцию

$$\varphi(t) = \alpha_1 x^1(t) + ... + \alpha_n x^n(t).$$

Эта вектор-функция является решением системы (4) как линейная комбинация решений и кроме того, $\varphi(t_0) = 0$. В силу утверждения 2 $\varphi(t) \equiv 0$ на промежутке (a, b), то есть

$$\alpha_1 x^1(t) + ... + \alpha_n x^n(t) = 0.$$

для любого $t \in (a, b)$.

Следовательно, $x^1(t), ..., x^n(t)$ линейно зависимы. Получили противоречие, так как по определению ФСР это система линейно независимых решений.

Таким образом фундаментальная матрица имеет ненулевой определитель, следовательно она обратима т.е. она имеет обратную матрицу.Этот факт позволяет написать решение в следующей форме.

Рассмотрим для системы (4) задачу Коши с начальным условием (3). Подставляя начальное условие (3) в (6), получим равенство

$$x^0 = X(t_0) \cdot C.$$

Отсюда находим вектор $C = X^{-1}(t_0)x^0$. Следовательно, решение задачи Коши (3),(4) можно написать в виде

$$x(t) = X(t) \cdot X^{-1}(t_0)x^0.$$

3.ОДНОРОДНАЯ СИСТЕМА ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Теперь рассмотрим однородную систему линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами:

$$\begin{cases} \dot{x_1} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n, \\ \dot{x_2} = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n, \\ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dot{x_n} = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n, \end{cases}$$

где $a_{ij} --$ заданные вещественные числа $(i, j = 1, 2, ..., n)$.

Эту систему можно записать в матричном виде:

$$\dot{x}(t) = A \cdot x(t), \tag{7}$$

где $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, матрица $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$–заданная квадратная матрица порядка n.

Будем искать решение этой системы в виде

$$x(t) = he^{\lambda t},$$

где $h = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix}$ –ненулевой постоянный вектор, а $\lambda-$ некоторое число.

Имеет место следующая теорема.

Теорема 1. Для того чтобы вектор-функция $x(t) = he^{\lambda t}$ была нетривиальным решением системы (7), необходимо и достаточно, чтобы число λ было собственным значением матрицы A, а $h-$ отвечающим ему собственным вектором $(Ah = \lambda h)$.

Из этого утверждения и известной теоремы курса линейной алгебры следует теорема.

Теорема 2. Вектор-функция $x(t) = he^{\lambda t}$ тогда и только тогда является нетривиальным решением системы (7), когда λ является корнем характеристического уравнения

$$det(A - \lambda E) = 0, \tag{8}$$

а вектор $h--$ ненулевым решением системы линейных алгебраических уравнений

$$(A - \lambda E)h = 0. \tag{9}$$

Как вытекает из выше приведенных утверждений общее решение системы (7) имеет вид

$$x_{oo} = c_1x_1(t) + c_2x_2(t) + ... + c_nx_n(t),$$

где $x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t)--$ фундаментальная система решений системы (7), $c_1, c_2, ..., c_n --$ произвольные постоянные.

Приведем метод Эйлера построения фундаментальной системы решений системы (7)..

Случай 1. Пусть матрица А имеет n различных вещественных значений $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$. Обозначим через $h_1, h_2, ..., h_n$ отвечающие им собственные векторы. Тогда вектор-функции

$$x_1(t) = h_1e^{\lambda_1 t}, x_2(t) = h_2e^{\lambda_2 t}, ..., x_n(t) = h_ne^{\lambda_n t}$$

образуют фундаментальную систему решений системы (7) на интервале $(-\infty; +\infty)$.

Пример-4. Рассмотрим систему второго порядка

$$\begin{cases} \dot{x_1} = x_2, \\ \dot{x_2} = x_1, \end{cases}$$

В этом случае матрица имеет следующий вид

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Собственные значения этой матрицы равны ± 1. Собственный вектор, который соответствует собственному значению 1 имеет вид $h_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$,

Собственный вектор, который соответствует собственному значению -1 имеет вид $h_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Общее решение этой системы имеет следующий вид

$$x = C_1 h_1 e^t + C_2 h_2 e^{-t}.$$

Случай 2. Пусть матрица A имеет n различных вещественных значений $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$, среди которых есть комплексные. Так как матрица A - вещественная, то, как известно, комплексное число $\lambda = \alpha + i\beta$ является корнем ее характеристического уравнения тогда и только тогда, когда комплексно–сопряженное число $\overline{\lambda} = \alpha - i\beta$ является корнем этого же характеристического уравнения, причем кратности корней λ и $\overline{\lambda}$ совпадают.

Предположим, что среди п различных корней характеристического уравнения $det(A - \lambda E) = 0$ есть 2s комплексных:

$$\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_s, \overline{\lambda_1}, \overline{\lambda_s}, ..., \overline{\lambda_s}$$

$(1 \leq s \leq \dfrac{n}{2})$ и $n - 2s$ вещественных: $\lambda_{2s+1}, ..., \lambda_n$. Тогда вектор-функции

$$x_1(t) = h_1 e^{\lambda_1 t}, x_2(t) = h_2 e^{\lambda_2 t}, ..., x_s(t) = h_s e^{\lambda_s t}$$

,

$$x_{s+1}(t) = \overline{h_1} e^{\overline{\lambda_1} t}, x_{s+2}(t) = \overline{h_2} e^{\overline{\lambda_2} t}, ..., x_{2s}(t) = \overline{h_s} e^{\overline{\lambda_s} t}$$

,

$$x_{2s+1}(t) = h_{2s+1} e^{\lambda_{2s+1} t}, ..., x_n(t) = h_n e^{\lambda_n t}$$

образуют фундаментальную систему решений (комплексную) системы (1), где $\overline{h_1}, \overline{h_2}, ..., \overline{h_s}$– вектор-столбцы, комплексно-сопряженные к собственным вектор-столбцам $h_1, h_2, ..., h_s$, отвечающим собственным значениям $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_s$.

Если $\lambda_k = \alpha_k + i\beta_k$, $h_k = \gamma_k + i\sigma_k$, $k = 1, 2, ..., s$ то вектор-функции

$$u_k(t) = Re(h_k e^{\lambda_k t}) = e^{\alpha_k t}(\gamma_k cos\beta_k t - \sigma_k sin\beta_k t)$$

$$v_k(t) = Im(h_k e^{\lambda_k t}) = e^{\alpha_k t}(\sigma_k cos\beta_k t + \gamma_k sin\beta_k t), \quad k = 1, 2, ..., s;$$
$$x_{2s+1}(t) = h_{2s+1} e^{\lambda_{2s+1} t}, ..., x_n(t) = h_n e^{\lambda_n t}$$

образуют вещественную фундаментальную систему решений системы (1).

Случай 3. Пусть $\lambda-$ собственное значение матрицы A, причем его алгебраическая кратность k равна геометрической кратности m, а $h^1, ..., h^m$ $- -$ линейно независимые собственные векторы, отвечающие собственному значению λ. Тогда вектор-функции $x^1 = e^{\lambda t} h^1$, $x^2 = e^{\lambda t} h^2$,...,$x^m = e^{\lambda t} h^m$ являются решениями,соответствующими собственному значению λ.

Если $\lambda-$ собственное значение матрицы A, кратности r можно поступить следующим образом. Пусть $\lambda - -$ корень характеристического уравнения $det(A - \lambda E) = 0$ кратности r. Тогда корню λ соответствует r линейно независимых решений системы (4) вида

$$x(t) = (\gamma_0 + \gamma_1 t + \gamma_2 t^2 + ... + \gamma_{r-1} t^{r-1}) e^{\lambda t} \tag{10}$$

где вектор-столбцы $\gamma_0, \gamma_1, ..., \gamma_{r_m-1}$ $- -$вещественные, если $\lambda - -$ вещественное число, и комплексные, если $\lambda - -$ комплексное число. Причем общее число найденных таким образом решений, отвечающих собственному значению λ равно r.

Для практического нахождения вектор-столбцов $\gamma_0, \gamma_1, ..., \gamma_{r-1}$ в (10) поступают следующим образом.

Подставив искомое решение (10) в уравнение (4) и приравняв коэффициенты при $t^k e^{\lambda_m t}$ в левой и правой частях, получают соотношения для векторов $\gamma_0, \gamma_1, ..., \gamma_{r-1}$:

$$\begin{cases} (A - \lambda E)\gamma_{r-1} = 0 \\ (A - \lambda E)\gamma_{r-2} = (r-1)\gamma_{r-2} \\ \cdots \\ (A - \lambda E)\gamma_k = (k+1)\gamma_{k+1} \\ \cdots \\ (A - \lambda E)\gamma_0 = \gamma_1 \end{cases} \tag{11}$$

Из этой системы находим векторы $\gamma_0, \gamma_1, ..., \gamma_{r-1}$. На практике целесообразно руководствоваться следующим правилом. Сначала полагают $\gamma_1 = \gamma_2 = ... = \gamma_{r-1} = 0$. Тогда система (11) приобретает наиболее простой вид:

$$(A - \lambda E)\gamma_0 = 0. \tag{12}$$

Это уравнение имеет хотя бы одно ненулевое решение, так как λ – – собственное значение матрицы A. Находят максимальное число линейно независимых вещественных (или комплексных) решений уравнения (12). Если их число меньше r, то разыскивают максимальное число линейно независимых вещественных (или комплексных) решений системы (11), подчиняющейся условиям: $\gamma_2 = \gamma_3 = ... = \gamma_{r-1} = 0$, $\gamma_1 \neq 0$, т.е. находят максимальное число линейно независимых вещественных (или комплексных) решений системы

$$\begin{cases} (A - \lambda E)\gamma_1 = 0 \\ (A - \lambda E)\gamma_0 = \gamma_1. \end{cases} \tag{13}$$

Если число вновь найденных линейно независимых решений системы (12) вместе с числом линейно независимых решений системы (11) окажется меньше r, то разыскивают максимальное число линейно независимых вещественных (или комплексных) решений системы (11), подчиняющейся условиям $\gamma_3 = \gamma_4 = ... = \gamma_{r-1} = 0$, $\gamma_2 \neq 0$, т.е. находят максимальное число линейно независимых решений системы

$$\begin{cases} (A - \lambda E)\gamma_2 = 0 \\ (A - \lambda E)\gamma_1 = 2\gamma_2 \\ (A - \lambda E)\gamma_0 = \gamma_1. \end{cases} \tag{14}$$

При этом, как легко видеть, векторы γ_0 и γ_1 также отличны от нуля.

Если число вновь найденных линейно независимых решений системы (14) вместе с числом линейно независимых решений систем (13) и (12) окажется меньше r, то указанный процесс построения линейно независимых решений вида (10) продолжают.

Утверждается, что на каком-то k-м шаге $(0 \leq k \leq r-1)$ мы получим r линейно независимых решений системы (4) вида (10), при этом все r линейно независимых решений (10) системы (4) окажутся такими, что $\gamma_{k+1} = \gamma_{k+2} = ... = \gamma_{r_m - 1} = 0$.

Пример 5. Найти общее решение системы

$$\begin{cases} \dot{x_1}(t) = 3x_1 - x_2 + x_3 \\ \dot{x_2}(t) = x_1 + x_2 + x_3 \\ \dot{x_3}(t) = 4x_1 - x_2 + 4x_3 \end{cases}$$

Решение. Характеристическое уравнение данной системы имеет вид

$$det(A-\lambda E)=\begin{vmatrix}3-\lambda & -1 & 1\\ 1 & 1-\lambda & 1\\ 4 & -1 & 4-\lambda\end{vmatrix}=0$$

или

$$det(A-\lambda E)=(3-\lambda)(1-\lambda)(4-\lambda)-2(1-\lambda)=(1-\lambda)(\lambda^2-7\lambda+10)=(1-\lambda)(\lambda-2)(\lambda-5)$$

т.е. это уравнение имеет три различных вещественных корня $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 5$.

Координаты собственных векторов h_1, h_2, h_3, отвечающих собственным значениям $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, находятся из систем, соответственно,

$$\begin{cases}2h_{11}-h_{21}+h_{31}=0\\ h_{11}+h_{31}=0\\ 4h_{11}-h_{21}+3h_{31}=0;\end{cases} \qquad \begin{cases}h_{12}-h_{22}+h_{32}=0\\ h_{12}-h_{22}+h_{32}=0\\ 4h_{12}-h_{22}+2h_{32}=0;\end{cases}$$

$$\begin{cases}-2h_{13}-h_{23}+h_{33}=0\\ h_{13}-4h_{23}+h_{33}=0\\ 4h_{13}-h_{23}-h_{33}=0.\end{cases}$$

Из этих систем видим, что в качестве собственных векторов можно взять

$$h_1=\begin{pmatrix}h_{11}\\ h_{21}\\ h_{31}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 1\\ -1\end{pmatrix};\ h_2=\begin{pmatrix}h_{12}\\ h_{22}\\ h_{32}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\ 2\\ 3\end{pmatrix};\ h_3=\begin{pmatrix}h_{13}\\ h_{23}\\ h_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 3\end{pmatrix}.$$

Следовательно, общее решение заданной системы дифференциальных уравнений имеет вид

$$x(t)=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=c_1\begin{pmatrix}1\\ 1\\ -1\end{pmatrix}e^t+c_2\begin{pmatrix}-1\\ 2\\ 3\end{pmatrix}e^{2t}+c_3\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 3\end{pmatrix}e^{5t}.$$

Пример 6. Найти общее решение системы

$$\begin{cases}\dot{x_1}(t)=x_1-x_2\\ \dot{x_2}(t)=x_1+3x_2\end{cases}$$

Решение. Характеристическое уравнение

$$det(A-\lambda E)=\begin{vmatrix}1-\lambda & -1\\ 1 & 3-\lambda\end{vmatrix}=0$$

или $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$ имеет кратный корень $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$.

Будем искать линейно независи- мые решения системы в виде

$$x(t) = (\gamma_0 + \gamma_1 t)e^{2t},$$

где γ_0, γ_1 подлежащие определению постоянные вектор-столбцы.

Подставляя решение вида в заданную систему, имеем

$$\gamma_1 e^{2t} + 2(\gamma_0 + \gamma_1 t)e^{2t} = A(\gamma_0 + \gamma_1 t)e^{2t}.$$

Приравняв коэффициенты при одинаковых степенях t, получим для определения вектор-столбцов γ_0, γ_1 систему

$$\begin{cases} (A-2E)\gamma_1 = 0 \\ (A-2E)\gamma_0 = \gamma_1 \end{cases}$$

А. Положим $\gamma_1 = 0$ тогда система примет вид

$$(A-2E)\gamma_0 = 0 \tag{15}$$

Единственным линейно независимым решением этой системы является вектор-столбец

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix};$$

получим ненулевое решение

$$X_1(t) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t};$$

Б. Рассмотрим систему

$$\begin{cases} (A-2E)\gamma_1 = 0 \\ (A-2E)\gamma_0 = \gamma_1 \end{cases}$$

Первое уравнение системы имеет такой же вид, что и (14), следовательно,

$$\gamma_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix};$$

Подставив γ_1 во второе уравнение системы, получим

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix};$$

Таким образом, получим следующее ненулевое решение системы :

$$X_2(t) = [\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} t]e^{2t}$$

Очевидно, что $X_1(t), X_2(t)-$ линейно независимые решения си- стемы и поэтому образуют фундаментальную систему реше- ний.

Значит, общее решение системы имеет вид

$$X(t) = C_1 X_1(t) + C_2 X_2(t),$$

где $C_1, C_2 --$ произвольные постоянные,

$$X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}.$$

Рекомендуемая литература

1. Бухарова Т.И. и др. Курс лекций по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: НИЯУ МИФИ, 2011.

2. Филиппов А.Ф. Введение в теорию дифференциальных уравнений. М., 2004.

3. Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. М., 2004.