Лекция №8

§ 31. Комплексные числа

Известно, что квадратное уравнение с вещественными коэффициентами и отрицательным дискриминантом не имеет вещественных корней. В частности, уравнение

$$z^2 + 1 = 0$$

не имеет корней на множестве R. Возникает потребность расширить

множество R так, чтобы на более широком множестве было разрешимо квадратное уравнение с любыми вещественными коэффициентами.

1. Определение комплексного числа. *Комплексными числами* называют пары (x, y) вещественных (действительных) чисел x и y, для которых следующим образом определены понятие равенства и операции сложения и умножения.

Обозначим комплексное число (x, y) буквой z, т. е. положим $z = (x, y)$. Пусть $z_1 = (x_1, y_1)$, $z_2 = (x_2, y_2)$. Два комплексных числа z_1 и z_2 считаются *равными* тогда и только тогда, когда $x_1 = x_2$ и $y_1 = y_2$, т. е.

$$\{(x_1, y_1) = (x_2, y_2)\} \Leftrightarrow \{x_1 = x_2\} \wedge \{y_1 = y_2\}.$$

Сумма и произведение комплексных чисел z_1 и z_2 обозначаются соответственно $z_1 + z_2$ и $z_1 z_2$ и определяются формулами

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2,\ y_1 + y_2), \tag{1}$$

$$z_2 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2,\ x_1 y_2 + x_2 y_1). \tag{2}$$

Из формул (1) и (2) следуют соотношения

$$(x_1, 0) + (x_2, 0) = (x_1 + x_2, 0), \quad (x_1, 0)(x_2, 0) = (x_1 x_2, 0),$$

которые показывают, что операции над комплексными числами вида $(x, 0)$ совпадают с операциями над действительными числами. Поэтому комплексное число вида $(x, 0)$ отождествляют с действительным числом x, т. е. полагают $(x, 0) = x$.

Среди комплексных чисел особую роль играет число $(0, 1)$, которое называют *мнимой единицей* и обозначают i, т. е.

$$i = (0, 1).$$

Вычислив произведение i на i по формуле (2), получим

$$i \cdot i = (0, 1)(0, 1) = (-1, 0) = -1,$$

т. е. $i^2 = -1$. Используя формулы (1), (2), находим

$$i \cdot y = (0, 1)(y, 0) = (0, y), \quad (x, y) = (x, 0) + (0, y) = x + iy.$$

Следовательно, любое комплексное число $z = (x, y)$ можно записать в виде $x + iy$, т. е.

$$z = x + iy. \tag{3}$$

Запись комплексного числа $z = (x, y)$ в виде (3) называют *алгебраической формой комплексного числа.*

В записи (3) число x называют *действительной частью комплексного числа* и обозначают $\operatorname{Re} z$, а число y — *мнимой частью* и обозначают $\operatorname{Im} z$, т. е.

$$\operatorname{Re} z = x, \quad \operatorname{Im} z = y.$$

Если $x = 0$, т. е. $z = iy$, то такое комплексное число называют *чисто мнимым.*

Здесь и всюду в дальнейшем, если не оговорено противное, в записи $x + iy$ числа x и y считаются действительными (вещественными).

Число $\sqrt{x^2 + y^2}$ обозначают $|z|$ и называют *модулем* комплексного числа z, т. е.

$$|z| = |x + iy| = \sqrt{x^2 + y^2}. \tag{4}$$

Заметим, что $|z| \geqslant 0$ и $\{|z| = 0\} \Leftrightarrow \{z = 0\}$.

Комплексное число $x - iy$ называют *сопряженным комплексному числу* $z = x + iy$ и обозначают $\overline{z}$, т. е.

$$\overline{z} = \overline{x + iy} = x - iy. \tag{5}$$

Из равенств (4) и (5) следует, что

$$|z| = |\overline{z}|, \quad z\overline{z} = |z|^2, \tag{6}$$

так как $z\overline{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2$.

2. Свойства операций. Операции сложения и умножения комплексных чисел обладают свойствами:

а) *коммутативности*, т. е.

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1, \quad z_1 z_2 = z_2 z_1;$$

б) *ассоциативности*, т. е.

$$(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3), \quad (z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3);$$

в) *дистрибутивности*, т. е.

$$z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3.$$

Эти свойства вытекают из определения операций сложения и умножения комплексных чисел и свойств операций для вещественных чисел.

Из этих свойств следует, что сложение и умножение комплексных чисел можно выполнять по правилам действий с многочленами, заменяя i^2 на -1. Например, равенство (2) можно получить так:

$$z_1 z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) =$$
$$= x_1 x_2 + i x_1 y_2 + i x_2 y_1 + i^2 y_1 y_2 = x_1 x_2 - y_1 y_2 + i(x_1 y_2 + x_2 y_1).$$

Множество комплексных чисел обозначают буквой C. Числа $0 = 0 + 0 \cdot i$ и $1 = 1 + 0 \cdot i$ на множестве C обладают такими же свойствами, какие они имеют на множестве R, а именно: для любого $z \in C$ справедливы равенства

$$z + 0 = z, \quad z \cdot 1 = z.$$

На множестве C вычитание вводится как операция, обратная сложению. Для любых комплексных чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ существует, и притом только одно, число z такое, что

$$z + z_2 = z_1. \tag{7}$$

Это число называют *разностью* чисел z_1 и z_2 и обозначают $z_1 - z_2$. В частности, разность $0 - z$ обозначают $-z$.

Из уравнения (7) в силу правила равенства и определения суммы комплексных чисел следует, что

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2).$$

Деление на множестве C вводится как операция, обратная умножению, а *частным* от деления комплексного числа $z_1 = x_1 + iy_1$ на число $z_2 = x_2 + iy_2$ называют такое число z, которое удовлетворяет уравнению

$$zz_2 = z_1 \tag{8}$$

и обозначается $z_1 : z_2$ или $\dfrac{z_1}{z_2}$.

Докажем, что уравнение (8) для любых комплексных чисел z_1 и z_2, где $z_2 \neq 0$, имеет единственный корень.

○ Умножая обе части уравнения (8) на $\overline{z}_2$, получим в силу равенства (6) уравнение

$$z|z_2|^2 = z_1\overline{z}_2, \tag{9}$$

которое равносильно уравнению (8), так как $\overline{z}_2 \neq 0$.

Умножая обе части (9) на $\dfrac{1}{|z_2|^2}$, получаем $z = \dfrac{z_1\overline{z}_2}{|z_2|^2}$, т. е.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\overline{z}_2}{|z_2|^2},$$

или

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_2 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{x_2^2 + y_2^2} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\,\frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}. \quad ●$$

Эту формулу можно не запоминать — важно знать, что она получается умножением числителя и знаменателя на число, сопряженное со знаменателем.

Пример 1. Найти частное $\dfrac{z_1}{z_2}$, если $z_1 = 5 - 2i$, $z_2 = 3 + 4i$.

△ $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{(5 - 2i)(3 - 4i)}{(3 + 4i)(3 - 4i)} = \dfrac{15 - 26i + 8i^2}{25} = \dfrac{7}{25} - \dfrac{26}{25}\,i.$ ▲

3. Геометрическая интерпретация комплексного числа.

а) *Комплексная плоскость.* Пусть на плоскости задана прямоугольная система координат. Комплексное число $z = x + iy$ изображается точкой плоскости с координатами (x, y), и эта точка обозначается той же буквой z.

Такое соответствие между множеством C и точками плоскости является взаимно однозначным: каждому числу $z \in C$ соответствует одна точка плоскости с координатами (x, y), и наоборот, каждой точке плоскости с координатами (x, y) соответствует одно комплексное число $z = x + iy$. Поэтому слова “комплексное число” и “точка плоскости” часто употребляются как синонимы.

При этом действительные числа, т. е. числа вида $x + 0 \cdot i$, изображаются точками оси абсцисс, а чисто мнимые числа, т. е. числа вида $iy = 0 + iy$ — точками оси ординат. Поэтому ось абсцисс называют *действительной* осью, а ось ординат — *мнимой* осью. Плоскость, на которой изображаются комплексные числа, называют *комплексной плоскостью.*

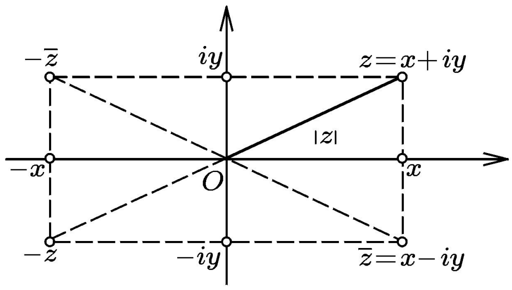

Рис. 31.1

На рис. 31.1 изображены точки z, $-z$, $\overline{z}$, $-\overline{z}$. Отметим, что точки z и $-z$ симметричны относительно точки 0, а точки z и $\overline{z}$ симметричны относительно действительной оси.

б) *Геометрический смысл модуля комплексного числа.* Комплексное число $z = x + iy$ можно изображать вектором с началом в точке 0 и концом в точке z. Этот вектор будем обозначать той же буквой z. Из рис. 31.1 или из формулы (4) видно, что длина вектора z равна $|z|$ и справедливы неравенства $|x| \leqslant |z|$, $|y| \leqslant |z|$, т. е.

$$|\operatorname{Re} z| \leqslant |z|, \quad |\operatorname{Im} z| \leqslant z.$$

С помощью векторной интерпретации наглядно иллюстрируются сумма и разность комплексных чисел. Число $z_1 + z_2$ изображается вектором, построенным по правилу сложения векторов z_1 и z_2

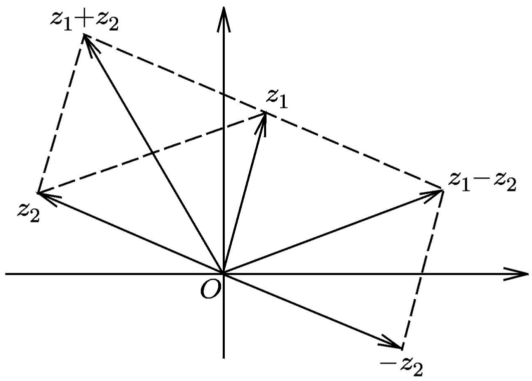

Рис. 31.2

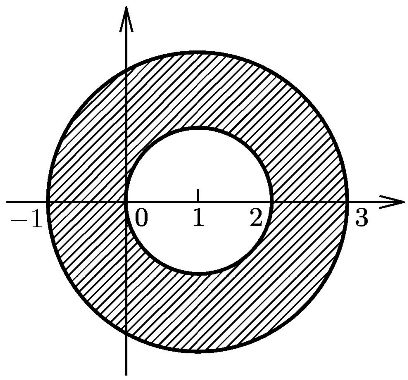

Рис. 31.3

(рис. 31.2), а вектор $z_1 - z_2$ можно построить как сумму векторов z_1 и $-z_2$. Из рис. 31.2 видно, что расстояние между точками z_1 и z_2 равно длине вектора $z_1 - z_2$, т. е. равно $|z_1 - z_2|$. Это же утверждение следует из равенства

$$|z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

Итак, $|z_1 - z_2|$ — расстояние между точками z_1 и z_2.

П р и м е р 2. Дать геометрическое описание множества всех точек комплексной плоскости, удовлетворяющих условию:

а) $|z - z_0| = R, \ \ R > 0$;

б) $1 < |z - 1| < 2$;

в) $|z - i| = |z + i|$.

$\triangle$ а) Условию $|z - z_0| = R$, где $R > 0$, z_0 — заданное комплексное число, удовлетворяют все точки, расстояние от которых до точки z_0 равно R, т. е. точки, лежащие на окружности радиуса R с центром в точке z_0.

б) Условию $|z - 1| < 2$ удовлетворяют все точки, лежащие внутри круга радиуса 2 с центром в точке $z = 1$, а условию $|z - 1| > 1$ — точки, лежащие вне круга радиуса 1 с центром в точке $z = 1$.

Оба эти условия выполняются для точек, лежащих между окружностями $|z - 1| = 1$ и $|z - 1| = 2$ (рис. 31.3).

в) Условию $|z - i| = |z + i|$ удовлетворяют те и только те точки, которые равноудалены от точек i и $-i$, т. е. все точки действительной оси. $\blacktriangle$

Покажем, что для любых комплексных чисел z_1 и z_2 справедливы неравенства

$$||z_1| - |z_2|| \leqslant |z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|. \tag{10}$$

$\circ$ Рассмотрим треугольник с вершинами 0, z_1 и $z_1 + z_2$ (рис. 31.2). Длины его сторон равны $|z_1|$, $|z_2|$ и $|z_1 + z_2|$. Поэтому неравенства (10) выражают известные из геометрии свойства длин сторон треугольника. $\bullet$

4. Тригонометрическая и показательная формы комплексного числа. Пусть r и φ — полярные координаты точки $z = x + iy$ комплексной плоскости (рис. 31.4); тогда

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \tag{11}$$

где $r = \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$, φ — угол между действительной осью и вектором z, отсчитываемый от положительного направления действительной оси. Если отсчет ведется против часовой стрелки, то величина угла считается положительной, а если по часовой стрелке — отрицательной. Этот угол называют *аргументом комплексного числа* z ($z \neq 0$) и обозначают $\arg z$. Для числа $z = 0$ аргумент не определяется, поэтому в дальнейшем при использовании понятия аргумента предполагается, что $z \neq 0$.

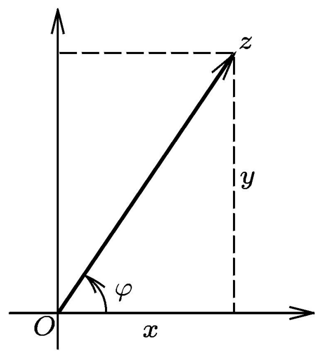

Рис. 31.4

Из равенств (11) следует, что любое комплексное число $z = x + iy$, где $z \neq 0$, представляется в виде

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi). \tag{12}$$

Запись комплексного числа $z \neq 0$ в виде (12) называют *тригонометрической формой комплексного числа.*

Из формул (11) находим

$$\cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}. \tag{13}$$

Решив систему (13), найдем аргумент комплексного числа $z \neq 0$. Эта система имеет бесконечно много решений вида $\varphi = \varphi_0 + 2k\pi$, где $k \in Z$, φ_0 — одно из решений системы (13), т. е. аргумент комплексного числа определяется неоднозначно.

Для нахождения аргумента обычно пользуются не формулами (13), а формулой

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}, \tag{14}$$

получаемой почленным делением второго из равенств (13) на первое. Следует иметь в виду, что не все значения φ, удовлетворяющие уравнению (14), являются аргументами числа z.

Пример 3. Найти все аргументы числа $-1+i\sqrt{3}$ и записать это число в тригонометрической форме.

$\triangle$ Комплексное число лежит во второй четверти, поэтому в качестве одного из решений уравнения $\operatorname{tg}\varphi = -\sqrt{3}$ можно взять $\varphi_0 = \frac{2\pi}{3}$, а все значения аргумента данного комплексного числа определяются формулой

$$\varphi = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, \quad k \in Z.$$

Так как $|-1+i\sqrt{3}| = 2$, то

$$-1+i\sqrt{3} = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right). \quad \blacktriangle$$

Если $|z| = 1$, $\varphi = \arg z$, то из формулы (12) получаем $z = \cos\varphi + i\sin\varphi$. Комплексное число $\cos\varphi + i\sin\varphi$ обозначается символом $e^{i\varphi}$, т. е. для любого $\varphi \in R$ функция $e^{i\varphi}$ определяется *формулой Эйлера*

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi. \tag{15}$$

Равенство (15) находит обоснование в теории рядов (§ 44).

Из формулы (15) следует, что $e^{2\pi i} = 1$, $e^{\pi i} = -1$, $e^{\pi i/2} = i$, $e^{-\pi i/2} = -i$ (рис. 31.5) и $|e^{i\varphi}| = 1$ для любого $\varphi \in R$.

Заменяя в равенстве (15) φ на $-\varphi$, получаем

$$e^{-i\varphi} = \cos\varphi - i\sin\varphi, \tag{16}$$

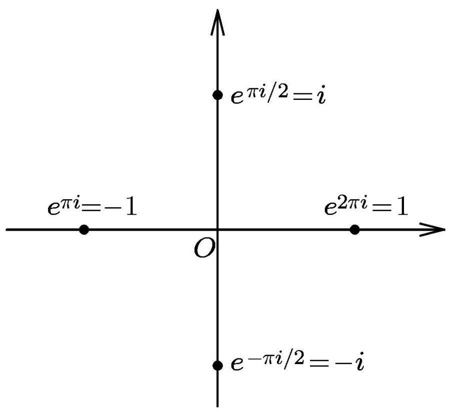

Рис. 31.5

а из равенств (15) и (16) следует, что

$$\cos\varphi = \frac{1}{2}(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}), \quad \sin\varphi = \frac{1}{2i}(e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}). \tag{17}$$

Отметим, что

$$e^{i\varphi_1}e^{i\varphi_2} = e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}, \quad \frac{e^{i\varphi_1}}{e^{i\varphi_2}} = e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}. \tag{18}$$

Для доказательства формул (18) следует воспользоваться формулами (15) и (2), а также формулами синуса и косинуса суммы (разности) углов. С помощью индукции из (18) можно получить *формулу Муавра*

$$e^{in\varphi} = (\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Используя формулы (12) и (15), запишем комплексное число $z \neq 0$ в *показательной форме*

$$z = re^{i\varphi}, \quad \text{где} \quad r = |z|, \quad \varphi = \arg z. \tag{19}$$

С помощью равенств (18) можно получить формулы для произведения и частного комплексных чисел: если $z_1 = r_1e^{i\varphi_1}$, $z_2 = r_2e^{i\varphi_2}$, то

$$z_1z_2 = r_1r_2e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}, \tag{20}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\,e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}, \quad z_2 \neq 0. \tag{21}$$

Из формулы (20) следует, что при перемножении комплексных чисел их модули перемножаются, а аргументы складываются, т. е.

$$|z_1z_2| = |z_1|\cdot|z_2|,$$

$$\varphi_1 + \varphi_2 = \arg(z_1 + z_2), \quad \text{если} \quad \varphi_1 = \arg z_1, \quad \varphi_2 = \arg z_2.$$

Аналогично из формулы (21) следует, что модуль частного двух комплексных чисел равен частному модулей этих чисел, а разность аргументов делимого и делителя является аргументом частного, т. е.

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \quad \text{если} \quad z_2 \neq 0,$$

и

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \arg\frac{z_1}{z_2}, \quad \text{если} \quad \varphi_1 = \arg z_1, \quad \varphi_2 = \arg z_2.$$

П р и м е р 4. Вычислить $\dfrac{(1+i)^4}{(1-i\sqrt{3})^6}$.

△ Так как $1 + i = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$, $1 - i\sqrt{3} = 2e^{-i\pi/3}$, то

$$\frac{(1+i)^4}{(1-i\sqrt{3})^6} = \frac{(\sqrt{2})^4e^{i\pi}}{2^6e^{-2\pi i}} = -\frac{1}{16}. \quad \blacktriangle$$

Из геометрической интерпретации (рис. 31.4) следует правило равенства двух комплексных чисел в показательной форме: если $z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$ и $z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$, то $z_1 = z_2$ тогда и только тогда, когда

$$r_1 = r_2, \quad \varphi_1 = \varphi_2 + 2k\pi, \quad k \in Z.$$

Рассмотрим теперь некоторые важные свойства комплексно сопряженных чисел. Пусть $z = re^{i\varphi} = r\cos\varphi + ir\sin\varphi$, тогда $\overline{z} = r\cos\varphi - ir\sin\varphi = re^{-i\varphi}$, т. е. если $\varphi = \arg z$, то $-\varphi = \arg\overline{z}$. Отсюда и из равенств (20), (21) следует, что

$$\overline{z_1 z_2} = \overline{z}_1\overline{z}_2, \quad \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z}_1}{\overline{z}_2}, \quad \overline{(z^n)} = (\overline{z})^n, \quad n \in N,$$

а из определения комплексно сопряженного числа следует, что

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z}_1 + \overline{z}_2, \quad \overline{z_1 - z_2} = \overline{z}_1 - \overline{z}_2.$$

5. Извлечение корня. Рассмотрим уравнение

$$z^n = a, \tag{22}$$

где $a \neq 0$ — комплексное число, n — натуральное число.

Если $z = re^{i\varphi}$, $a = \rho e^{i\theta}$, то уравнение (22) примет вид

$$r^n e^{in\varphi} = \rho e^{i\theta},$$

откуда

$$r^n = \rho, \quad n\varphi = \theta + 2k\pi, \quad k \in Z,$$

и поэтому

$$r = \sqrt[n]{\rho}, \quad \varphi_k = \frac{1}{n}(\theta + 2k\pi), \quad k \in Z, \tag{23}$$

т. е. числа

$$z_k = \sqrt[n]{\rho}\, e^{i\varphi_k} \tag{24}$$

являются корнями уравнения (22) и других корней это уравнение не имеет.

Заметим, что числа $z_0, z_1, ..., z_{n-1}$ различны, так как их аргументы $\varphi_0 = \dfrac{\theta}{n}$, $\varphi_1 = \dfrac{\theta}{n} + \dfrac{2\pi}{n}$, ..., $\varphi_{n-1} = \dfrac{\theta}{n} + \dfrac{2\pi(n-1)}{n}$ различны и отличаются друг от друга меньше, чем на 2π. Далее, $z_n = z_0$, так как $|z_n| = |z_0| = \sqrt[n]{\rho}$ и $\varphi_n = \varphi_0 + 2\pi$. Аналогично, $z_{n+1} = z_1$, $z_{-1} = z_{n-1}$ и т. д.

Итак, при $a \neq 0$ уравнение (22) имеет ровно n различных корней, определяемых формулами (23) и (24), где $k = 0, 1, ..., n-1$.

На комплексной плоскости точки z_k $(k = \overline{0, n-1})$ располагаются в вершинах правильного n-угольника, вписанного в окружность радиуса $\sqrt[n]{\rho}$ с центром в точке 0.

П р и м е р 5. Найти все корни уравнения $z^4 = 1 + i$.

△ Корни z_k $(k = \overline{0,3})$ этого уравнения определяются формулами (23) и (24), где $\rho = |1+i| = \sqrt{2}$, $\theta = \dfrac{\pi}{4}$, т. е.

$$z_k = \sqrt[8]{2} e^{i\varphi_k},$$

где

$$\varphi_k = \frac{\pi}{16} + \frac{\pi k}{2}, \quad k = 0, 1, 2, 3.$$

Точки z_k располагаются в вершинах квадрата (рис. 31.6). ▲

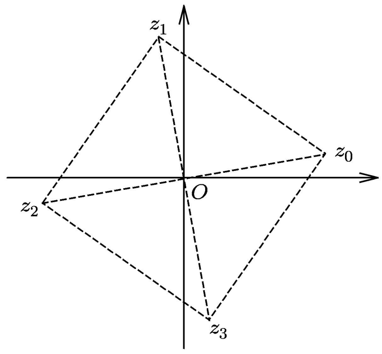

Рис. 31.6