Лекция №10

§ 10. Предел функции

1. Понятие предела. Важную роль в курсе математического анализа играет понятие предела, связанное с поведением функции в окрестности данной точки. Напомним, что δ-окрестностью точки a называется интервал длины 2δ с центром в точке a, т. е. множество

$$U_\delta(a) = \{x\colon\ |x-a| < \delta\} = \{x\colon\ a-\delta < x < a+\delta\}.$$

Если из этого интервала удалить точку a, то получим множество, которое называют *проколотой δ-окрестностью точки a* и обозначают $\dot{U}_\delta(a)$, т. е.

$$\dot{U}_\delta(a) = \{x\colon\ |x-a| < \delta,\ \ x \neq a\} = \{x\colon\ 0 < |x-a| < \delta\}.$$

Предваряя определение предела функции, рассмотрим два примера.

Пример 1. Исследуем функцию $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1}$ в окрестности точки $x = 1$.

$\triangle$ Функция f определена при всех $x \in R$, кроме $x = 1$, причем $f(x) = x + 1$ при $x \neq 1$. График этой функции изображен на рис. 10.1. Из этого рисунка видно, что значения функции близки к 2, если значения x близки к 1 ($x \neq 1$). Придадим этому утверждению точный смысл.

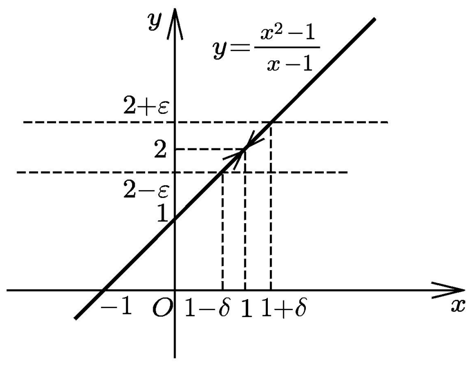

Рис. 10.1

Пусть задано любое число $\varepsilon > 0$ и требуется найти число $\delta > 0$ такое, что для всех x из проколотой δ-окрестности точки $x = 1$ значения функции $f(x)$ отличаются от числа 2 по абсолютной величине меньше, чем на ε.

Иначе говоря, нужно найти число $\delta > 0$ такое, чтобы для всех $x \in \dot{U}_\delta(a)$ соответствующие точки графика функции $y = f(x)$ лежали в горизонтальной полосе, ограниченной прямыми $y = 2 - \varepsilon$ и $y = 2 + \varepsilon$ (см. рис. 10.1), т. е. чтобы выподнялось условие $f(x) \in U_\varepsilon(2)$. В данном примере можно взять $\delta = \varepsilon$.

В этом случае говорят, что функция $f(x)$ стремится к двум при x, стремящемся к единице, а число 2 называют пределом функции $f(x)$ при $x \to 1$ и пишут $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 2$ или $f(x) \to 2$ при $x \to 1$. ▲

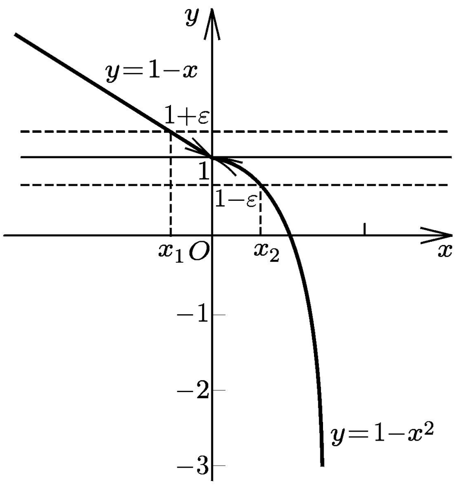

Рис. 10.2

Пример 2. Исследуем функцию

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x, & \text{если} \quad x < 0, \\ 0, & \text{если} \quad x = 0, \\ 1 - x^2, & \text{если} \quad x > 0, \end{cases}$$

в окрестности точки $x = 0$.

△ Из графика этой функции (рис. 10.2) видно, что для любого $\varepsilon > 0$ можно найти $\delta > 0$ такое, что для всех $x \in \dot{U}_\delta(0)$ выполняется условие $f(x) \in U_\varepsilon(1)$. В самом деле, прямые $y = 1 + \varepsilon$ и $y = 1 - \varepsilon$ пересекают график функции $y = f(x)$ в точках, абсциссы которых равны $x_1 = -\varepsilon$, $x_2 = \sqrt{\varepsilon}$. Пусть δ — наименьшее из чисел $|x_1|$ и x_2, т. е. $\delta = \min(\varepsilon, \sqrt{\varepsilon})$. Тогда если $|x| < \delta$ и $x \neq 0$, то

$|f(x) - 1| < \varepsilon$, т. е. для всех $x \in \dot{U}_\delta(0)$ выполняется условие $f(x) \in \in U_\varepsilon(1)$. В этом случае говорят, что функция $f(x)$ стремится к единице при x, стремящемся к нулю, и пишут

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 1. \quad ▲$$

В первом примере функция не определена в точке $x = 1$, а во втором функция определена в точке $x = 0$, но значение функции в точке $x = 0$ не совпадает с ее пределом при $x \to 0$.

2. Два определения предела функции и их эквивалентность.

а) *Определение предела по Коши.* Число A называется *пределом функции $f(x)$ в точке a*, если эта функция определена в некоторой окрестности точки a, за исключением, быть может, самой точки a, и для каждого $\varepsilon > 0$ найдется число $\delta > 0$ такое, что для всех x, удовлетворяющих условию $|x - a| < \delta$, $x \neq a$, выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$. В этом случае пишут $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ или $f(x) \to A$ при $x \to a$.

С помощью логических символов это определение можно записать так:

$\{\lim\limits_{x\to a} f(x) = A\} \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta > 0\colon\ \forall x\colon\ 0 < |x-a| < \delta \to |f(x) - A| < \varepsilon,$

или, используя понятие окрестности, в виде

$$\{\lim_{x\to a} f(x) = A\} \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta > 0\colon\ \forall x \in \dot{U}_\delta(a) \to f(x) \in U_\varepsilon(A).$$

Таким образом, число A есть предел функции $f(x)$ в точке a, если для любой ε-окрестности числа A можно найти такую проколотую δ-окрестность точки a, что для всех x, принадлежащих этой δ-окрестности, соответствующие значения функции содержатся в ε-окрестности числа A.

Замечание 1. В определении предела функции в точке a предполагается, что $x \neq a$. Это требование связано с тем, что точка a может не принадлежать области определения функции. Отсутствие этого требования сделало бы невозможным использование предела для определения производной, так как производная функции $f(x)$ в точке a — это предел функции

$$F(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a},$$

которая не определена в точке a.

Отметим еще, что число δ, фигурирующее в определении предела, зависит, вообще говоря, от ε, т. е. $\delta = \delta(\varepsilon)$.

б) *Определение предела по Гейне.* Число A называется *пределом функции* $f(x)$ *в точке* a, если эта функция определена в некоторой проколотой окрестности точки a, т. е. $\exists\delta_0 > 0\colon\ \dot{U}_{\delta_0}(a) \subset D(f)$, и для любой последовательности $\{x_n\}$, сходящейся к a и такой, что $x_n \in \dot{U}_{\delta_0}(a)$ для всех $n \in N$, соответствующая последовательность значений функции $\{f(x_n)\}$ сходится к числу A.

Пример 3. Пользуясь определением предела по Гейне, доказать, что функция

$$f(x) = \sin\frac{1}{x}$$

не имеет предела в точке $x = 0$.

$\triangle$ Достаточно показать, что существуют последовательности $\{x_n\}$ и $\{\widetilde{x}_n\}$ с отличными от нуля членами, сходящиеся к нулю и такие, что $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) \neq \lim\limits_{n\to\infty} f(\widetilde{x}_n)$. Возьмем $x_n = \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right)^{-1}$, $\widetilde{x}_n = (\pi n)^{-1}$, тогда $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} \widetilde{x}_n = 0$, $f(x_n) = 1$ и $f(\widetilde{x}_n) = 0$ для всех $n \in N$, и поэтому $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = 1$, а $\lim\limits_{n\to\infty} f(\widetilde{x}_n) = 0$. Следовательно, функция $\sin\frac{1}{x}$ не имеет предела в точке $x = 0$. $\blacktriangle$

Замечание 2. Если функция f определена в проколотой δ_0-окрестности точки a и существуют число A и последовательность $\{x_n\}$ такие, что $x_n \in \dot{U}_{\delta_0}(a)$ при всех $n \in N$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ и $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$, то число A называют *частичным пределом функции* f *в точке* a.

Так, например, для функции $f(x) = \sin\dfrac{1}{x}$ каждое число $A \in [-1, 1]$ является ее частичным пределом. В самом деле, последовательность $\{x_n\}$, где $x_n = (\arcsin A + 2\pi n)^{-1}$, образованная из корней уравнения $\sin\dfrac{1}{x} = A$ (рис. 10.3), такова, что $x_n \neq 0$ для всех $n \in N$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$.

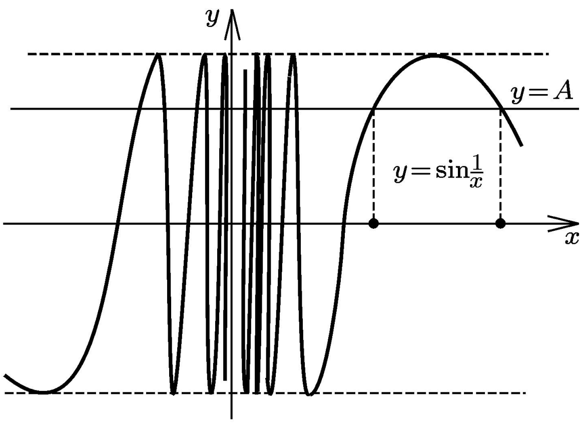

Рис. 10.3

в) *Эквивалентность двух определений предела.*

Теорема 1. *Определения предела функции по Коши и по Гейне эквивалентны.*

○ В определениях предела функции $f(x)$ по Коши и по Гейне предполагается, что функция f определена в некоторой проколотой окрестности точки a, т. е. существует число $\delta_0 > 0$ такое, что $\dot{U}_{\delta_0} \in D(f)$.

а) Пусть число A есть предел функции f в точке a по Коши; тогда $\exists \delta_0 > 0\colon\ \dot{U}_{\delta_0} \subset D(f)$ и

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta \in (0, \delta_0]\colon \quad \forall x \in \dot{U}_\delta(a) \to f(x) \in U_\varepsilon(A). \qquad (1)$$

Рассмотрим произвольную последовательность $\{x_n\}$, сходящуюся к числу a и такую, что $x_n \in \dot{U}_{\delta_0}(a)$ для всех $n \in N$. Согласно определению предела последовательности для найденного в (1) числа $\delta =$

$= \delta(\varepsilon) > 0$ можно указать номер n_δ такой, что $\forall n \geqslant n_\delta \to x_n \in \dot{U}_\delta(a)$, откуда в силу условия (1) следует, что $f(x_n) \in U_\varepsilon(A)$. Таким образом,

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_\varepsilon\colon\ \forall n \geqslant N_\varepsilon \to f(x_n) \in U_\varepsilon(A), \qquad (2)$$

где $N_\varepsilon = n_{\delta(\varepsilon)}$, причем условие (2) выполняется для любой последовательности $\{x_n\}$ такой, что $\lim\limits_{x\to\infty} x_n = a$ и $x_n \in \dot{U}_{\delta_0}(a) \subset D(f)$. Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$, т. е. число A — предел функции $f(x)$ в точке a по Гейне.

б) Докажем, что если число A есть предел функции $f(x)$ в точке a по Гейне, то это же число является пределом функции f по Коши, т. е. выполняется условие (1). Допустим, что это неверно. Тогда

$$\exists\varepsilon_0 > 0\colon\ \forall\delta \in (0, \delta_0]\quad \exists x(\delta) \in \dot{U}_\delta(a)\colon\ |f(x(\delta)) - A| \geqslant \varepsilon_0. \qquad (3)$$

Согласно (3) в качестве δ можно взять любое число из полуинтервала $(0, \delta_0]$. Возьмем $\delta = \delta_0/n$, где $n \in N$, и обозначим $x_n = x(\delta_0/n)$. Тогда в силу (3) для любого $n \in N$ выполняются неравенства

$$0 < |x_n - a| < \delta_0/n, \qquad (4)$$

$$|f(x_n) - A| \geqslant \varepsilon_0. \qquad (5)$$

Из (4) следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ и $x_n \in \dot{U}_{\delta_0}(a)$ при всех $n \in N$, а из (5) заключаем, что число A не может быть пределом последовательности $\{f(x_n)\}$. Следовательно, число A не является пределом функции f в точке a по Гейне. Полученное противоречие доказывает, что должно выполняться утверждение (1). ●

Упражнение 1. Доказать, что если функция $f(x)$ имеет предел в точке a, то этот предел единственный.

Замечание 3. Пусть a — *предельная точка* числового *множества* E, т. е. такая точка, в любой окрестности которой содержится по крайней мере одна точка множества E, отличная от a. Тогда число A называют *пределом по Коши функции* $f(x)$ *в точке* a *по множеству* E и обозначают $\lim\limits_{x\to a,\ x\in E} f(x) = A$, если

$$\forall\varepsilon > 0\quad \exists\delta > 0\colon\ \forall x \in \dot{U}_\delta(a) \cap E \to |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Предполагается, что $\dot{U}_{\delta_0}(a) \cap E \subset D(f)$ для некоторого $\delta_0 > 0$. Аналогично формулируется определение предела по Гейне по множеству E. Например, функция Дирихле f, равная единице для любого $x \in Q$ и равная нулю для любого $x \in J$, имеет предел по множеству Q и по множеству J, причем $\lim\limits_{x\to a,\ x\in Q} f(x) = 1$, $\lim\limits_{x\to a,\ x\in J} f(x) = 0$ для любой точки $a \in R$.

3. Различные типы пределов.

а) *Односторонние конечные пределы.* Число A называют *пределом слева функции* $f(x)$ в точке a и обозначают $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)$ или $f(a-0)$, если

$$\forall\varepsilon > 0\quad \exists\delta > 0\colon\ \forall x \in (a - \delta, a) \to |f(x) - A_1| < \varepsilon.$$

Аналогично число A_2 называют *пределом справа функции* $f(x)$ в точке a и обозначают $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$ или $f(a+0)$, если

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta > 0\colon\ \forall x \in (a, a+\delta) \to |f(x) - A_2| < \varepsilon.$$

Числа A_1 и A_2 характеризуют поведение функции f соответственно в левой и правой полуокрестности точки a, поэтому пределы слева и справа называют *односторонними пределами.* Если $a = 0$, то предел слева функции $f(x)$ обозначают $\lim\limits_{x\to -0} f(x)$ или $f(-0)$, а предел справа обозначают $\lim\limits_{x\to +0} f(x)$ или $f(+0)$.

Например, для функции $f(x) = \operatorname{sign} x$, где

$$\operatorname{sign} x = \begin{cases} -1, & \text{если} \quad x < 0, \\ 0, & \text{если} \quad x = 0, \\ 1, & \text{если} \quad x > 0, \end{cases}$$

график которой изображен на рис. 10.4, $\lim\limits_{x\to -0} f(x) = f(-0) = -1$, $\lim\limits_{x\to +0} f(x) = f(+0) = 1$.

Отметим еще, что если

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta > 0\colon\ \forall x \in \dot{U}_\delta(a) \to f(x) \in [A, A+\varepsilon),$$

т. е. значения функции лежат в правой ε-полуокрестности числа A, то

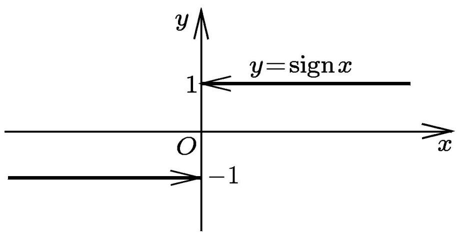

Рис. 10.4

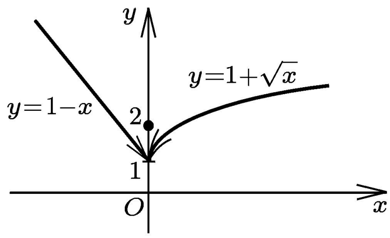

Рис. 10.5

пишут $\lim\limits_{x\to A} f(x) = A + 0$. В частности, если $A = 0$, то пишут $\lim\limits_{x\to a} f(x) =$ $= +0$.

Аналогично

$$\{\lim\limits_{x\to a} f(x) = A - 0\} \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta > 0\colon\ \forall x \in \dot{U}_\delta(a) \to f(x) \in (A-\varepsilon, A].$$

Например, для функции

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 - x, & \text{если} \quad x < 0, \\ 2, & \text{если} \quad x = 0, \\ 1 + \sqrt{x}, & \text{если} \quad x > 0, \end{cases}$$

график которой изображен на рис. 10.5, $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1 + 0$.

Аналогичный смысл имеют записи вида

$$\lim_{x\to a-0} f(x) = A+0, \quad \lim_{x\to a+0} f(x) = A-0.$$

Например,

$$\{\lim_{x\to a-0} f(x) = A+0\} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \forall\varepsilon>0 \quad \exists\delta>0\colon\ \forall x\in(a-\delta,a)\to f(x)\in[A,A+\varepsilon).$$

Упражнение 2. Записать с помощью логических символов утверждение $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = A-0$.

Упражнение 3. Доказать, что функция $f(x)$ имеет предел в точке a тогда и только тогда, когда в этой точке существуют односторонние пределы функции f и выполняется равенство $f(a-0)=f(a+0)$.

б) *Бесконечные пределы в конечной точке.* Говорят, что функция $f(x)$, определенная в некоторой проколотой окрестности точки a, имеет в этой точке *бесконечный предел*, и пишут $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$, если

$$\forall\varepsilon>0 \quad \exists\delta>0\colon\ \forall x\in\dot{U}_\delta(a)\to|f(x)|>\varepsilon. \tag{6}$$

В этом случае функцию $f(x)$ называют *бесконечно большой при $x\to a$.*

Согласно условию (6) график функции $y=f(x)$ для всех $x\in\dot{U}_\delta(a)$ лежит вне горизонтальной полосы $|y|<\varepsilon$. Обозначим

$$U_\varepsilon(\infty)=\{y\colon\ |y|>\varepsilon\}=(-\infty,-\varepsilon)\cup(\varepsilon,+\infty)$$

и назовем это множество *ε-окрестностью бесконечности.* Тогда запись $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$ означает, что для любой ε-окрестности бесконечности $U_\varepsilon(\infty)$ найдется такая проколотая δ-окрестность точки a, что для всех $x\in\dot{U}_\delta(a)$ выполняется условие $f(x)\in U_\varepsilon(\infty)$.

Например, если $f(x)=1/x$, то $\lim\limits_{x\to0} f(x)=\infty$, так как условие (6) выполняется при $\delta=1/\varepsilon$ (рис. 10.6).

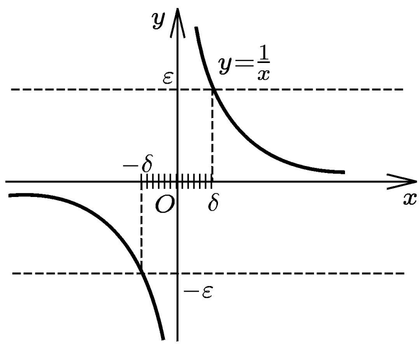

Рис. 10.6

Аналогично говорят, что функция $f(x)$, определенная в некоторой проколотой окрестности точки a, имеет в этой точке *предел, равный* $+\infty$, и пишут $\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$, если

$$\forall\varepsilon>0\ \ \exists\delta>0\colon\ \forall x\in\dot{U}_\delta(a)\to f(x)>\varepsilon,$$

т. е. $f(x)\in U_\varepsilon(+\infty)$, где множество $U_\varepsilon(+\infty)$ называют *ε-окрестностью символа $+\infty$.*

Если
$$\forall\varepsilon>0 \quad \exists\delta>0\colon\ \forall x\in\dot{U}_\delta(a)\to f(x)<-\varepsilon,$$

т. е. $f(x)\in U_\varepsilon(-\infty)$, где $U_\varepsilon(-\infty)=(-\infty,-\varepsilon)$, то говорят, что функ-

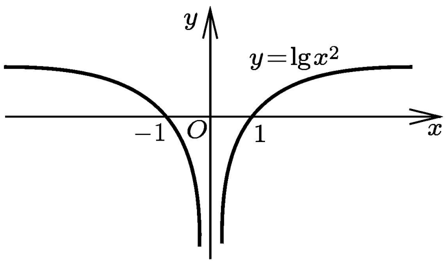

Рис. 10.7

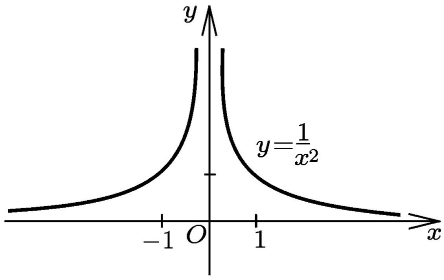

Рис. 10.8

ция f имеет в точке a *предел, равный* $-\infty$, и пишут $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$, а множество $U_\varepsilon(-\infty)$ называют *ε-окрестностью символа* $-\infty$.

Например, если $f(x) = \lg x^2$ (рис. 10.7), то $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty$, а если $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ (рис. 10.8), то $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty$.

Упражнение 4. Сформулировать с помощью логических символов утверждения:

а) $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = +\infty$; б) $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = \infty$.

в) *Предел в бесконечности.* Если

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta > 0\colon\ \forall x \in U_\delta(+\infty) \to f(x) \in U_\varepsilon(A),$$

то говорят, что число A есть *предел функции $f(x)$ при x, стремящемся к плюс бесконечности*, и пишут $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = A$.

Например, если $f(x) = \dfrac{3-2x}{x+1}$ (см. рис. 9.4), то $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = -2$. В самом деле, $f(x) = -2 + \dfrac{5}{x+1}$, и если $x > 0$, то $x + 1 > x > 0$. Поэтому $\dfrac{5}{x+1} < \dfrac{5}{x}$, откуда следует, что неравенство $|f(x) + 2| < \dfrac{5}{x} < \varepsilon$ для любого $\varepsilon > 0$ выполняется при любом $x > \delta$, где $\delta = \dfrac{5}{\varepsilon}$, т. е. при любом $x \in U_\delta(+\infty)$.

Если $\forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta > 0\colon\ \forall x \in U_\delta(-\infty) \to f(x) \in U_\varepsilon(A)$, т. е. неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$ выполняется для всех $x \in (-\infty, -\delta)$, то говорят, что число A есть *предел функции $f(x)$ при x, стремящемся к минус бесконечности*, и пишут $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = A$. Например, $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{3-2x}{x+1} = -2$ (см. рис. 9.4).

Аналогично, если

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta > 0\colon\ \forall x \in U_\delta(\infty) \to f(x) \in U_\varepsilon(A),$$

то говорят, что число A есть *предел функции $f(x)$ при x, стремящемся к бесконечности*, и пишут $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$. Например, если $f(x) = \dfrac{3-2x}{x+1}$, то $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -2$.

Точно так же вводится понятие бесконечного предела в бесконечности. Например, запись $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ означает, что $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > > 0\colon\ \forall x \in U_\delta(+\infty) \to f(x) \in U_\varepsilon(-\infty)$. Аналогично определяются бесконечные пределы при $x \to \infty$ и $x \to -\infty$.

Упражнение 5. Сформулировать с помощью логических символов и окрестностей (или неравенств) следующие утверждения:
а) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \infty$; б) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = +\infty$.