Лекция №9

ГЛАВА III

ПРЕДЕЛ И НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ

§ 9. Числовые функции

1. Понятие числовой функции. Пусть дано числовое множество $X \subset R$. Если каждому $x \in X$ поставлено в соответствие по некоторому правилу число y, то говорят, что на множестве X определена *числовая функция.*

Правило, устанавливающее соответствие, обозначают некоторым символом, например, f, и пишут

$$y = f(x), \quad x \in X, \tag{1}$$

а множество X называют *областью определения функции* и обозначают $D(f)$, т. е. $X = D(f)$.

В записи (1) x часто называют *аргументом* или *независимой переменной*, а y — *зависимой переменной.* Числа x из множества $D(f)$ называют *значениями аргумента.* Число y_0, соответствующее значению $x_0 \in D(f)$, называют *значением функции* при $x = x_0$ (или значением функции в точке x_0) и обозначают $f(x_0)$ или $f(x)|_{x=x_0}$. Совокупность всех значений, которые функция принимает на множестве $D(f)$, называют *множеством значений функции* и обозначают $E(f)$. Заметим, что если $y_0 \in E(f)$, то существует по крайней мере одно число $x_0 \in D(f)$ такое, что $f(x_0) = y_0$.

Функцию часто обозначают только символом (f, φ, F и т. д.), который определяет правило (закон) соответствия. Для обозначения функции используются также записи вида $x \mapsto f(x)$, $f\colon\ X \to Y$. Под словом “функция” часто понимают зависимую переменную y, значения которой определяются значениями независимой переменной x и правилом f, или даже само это правило. Термин “функция” имеет синонимы: *отображение*, *преобразование*, *морфизм.* Например, говорят, что функция f отображает множество $X = D(f)$ на множество $Y = E(f)$, и называют множество Y *образом множества* X *при отображении* f. Если $E(f) \subset E_1$, то говорят, что функция f *отображает* X *в* E_1.

2. Равенство функций. Операции над функциями. Функции f и g называют *равными* или совпадающими, если они имеют одну и ту же область определения X и для каждого $x \in X$ значения этих функций совпадают. В этом случае пишут $f(x) = g(x)$, $x \in X$ или $f = g$.

Например, если $f(x) = \sqrt{x^2}$, $x \in R$, и $g(x) = |x|$, $x \in R$, то $f = g$, так как при всех $x \in R$ справедливо равенство $\sqrt{x^2} = |x|$.

Если $E' \subset D(f)$, то функцию $g(x) = f(x)$, $x \in E'$, называют *сужением функции* f *на множество* E'. Например, если $E' = [0, +\infty)$, то функция $g(x) = x$, $x \in E'$, является сужением функции $f(x) = |x|$, $x \in R$, на множество E'.

Если равенство $f(x) = g(x)$ верно при всех $x \in E'$, где $E' \subset D(f) \cap \cap D(g)$, т. е. сужения функций f и g на множество E' совпадают, то в этом случае говорят, что функции f и g *равны на множестве* E'. Например, функции $\sqrt{x^2}$ и x равны на множестве $E' = [0, +\infty)$.

Естественным образом для функций вводятся арифметические операции. Пусть функции f и g определены на одном и том же множестве E. Тогда функции, значения которых в каждой точке $x \in \in E$ равны $f(x) + g(x)$, $f(x) - g(x)$, $f(x)g(x)$, $f(x)/g(x)$ ($g(x) \neq 0$ для всех $x \in E$), называют соответственно *суммой*, *разностью*, *произведением* и *частным функций* f и g и обозначают $f + g$, $f - g$, fg, f/g.

Введем понятие сложной функции. Пусть функции $y = \varphi(x)$ и $z = f(y)$ определены на множествах X и Y соответственно, причем множество значений функции φ содержится в области определения функции f. Тогда функцию, принимающую при каждом $x \in X$ значение $F(x) = f(\varphi(x))$, называют *сложной функцией* или *суперпозицией* (*композицией*) *функций* φ и f и обозначают $f \circ \varphi$ Например, функция $z = \sqrt{4 - x^2}$, $x \in [-2, 2]$, является композицией функций $y = 4 - x^2$, $x \in [-2, 2]$, и $z = \sqrt{y}$, $y \in [0, +\infty)$. Эта функция относится к совокупности *элементарных функций*, т. е. функций, которые можно получить из *основных элементарных функций* с помощью конечного числа арифметических операций и композиций. К основным элементарным функциям относят постоянную, степенную, логарифмическую, тригонометрические и обратные тригонометрические функции. Например, элементарными являются функции:

а) *линейная* $y = ax + b$, $\quad a \neq 0$;

б) *квадратичная* $y = ax^2 + bx + c$, $\quad a \neq 0$;

в) *многочлен степени* n, т. е. функция $y = P_n(x)$, где $P_n(x) = = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$, $\ a_n \neq 0$;

г) *рациональная функция*, т. е. функция вида $y = \dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$, где P_n и Q_m — многочлены степени n и m, $\ m \neq 0$.

3. Способы задания функции. Числовые функции чаще всего задаются при помощи формул. Такой способ задания называют *аналитическим.* Например, функции $y = x^2$, $y = |x|^{3/2}$, $y = \sin^3 3x$ заданы на множестве R аналитически.

Если числовая функция f задана формулой и не указана область ее определения $D(f)$, то принято считать, что $D(f)$ — множество всех тех значений аргумента, при которых эта формула имеет смысл, и результатом каждой операции, указанной в формуле, является вещественное число. Например, если $f(x)=\sqrt{9-x^2}$, то $D(f)=[-3,3]$, а если $f(x)=\sqrt{\lg\sin x}$, то $D(f)$ — множество корней уравнения $\sin x=1$, т. е. множество чисел $x_k=\pi/2+2\pi k$, где $k\in Z$.

Следует отметить, что функция может быть задана различными формулами на разных промежутках. Например, функция

$$f(x)=\begin{cases} -x, & \text{если} \quad x<0,\\ x^2, & \text{если} \quad 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 2-\sqrt{x}, & \text{если} \quad x>1,\end{cases}$$

задана аналитическим способом на R с помощью трех различных формул.

Иногда функциональная зависимость описывается с помощью таблицы, содержащей лишь некоторые значения аргумента и соответствующие значения функции. Для значений аргумента, не содержащихся в таблице, значения функции обычно находят приближенно.

На практике часто соответствие между значениями аргумента и значениями функции задается с помощью рисунка. Например, в медицине при изучении работы сердца получают электрокардиограммы — кривые, отражающие изменение с течением времени электрических импульсов в мышце сердца. В практике физических измерений функциональная зависимость часто задается с помощью эскиза графика, снимаемого, например, с экрана осциллографа.

4. График функции. *Графиком функции* $y=f(x)$, $x\in D(f)$, в прямоугольной системе координат Oxy называют множество всех точек плоскости с координатами $(x,f(x))$, где $x\in D(f)$.

Для каждого $x_0\in D(f)$ прямая $x=x_0$, параллельная оси Oy, пересекает график функции $y=f(x)$, $x\in D(f)$, в одной точке $M_0(x_0,y_0)$, где $y_0=f(x_0)$ — значение функции f при $x=x_0$. Значение $x=a$, при котором $f(a)=0$, называют ***нулем функции*** $f(x)$. Если $x=a$ — нуль функции f, то график функции $y=f(x)$ пересекает ось Ox при $x=a$, т. е. в точке $M(a,0)$.

Строго говоря, следует различать график функции, точное определение которого дано выше, и эскиз части графика, принимаемый нередко за график.

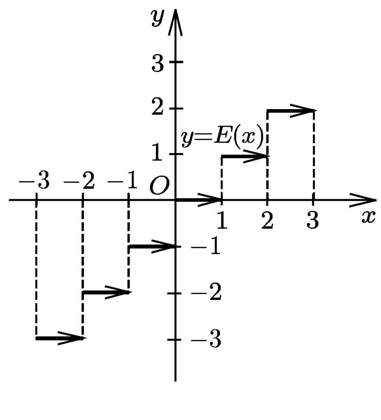

Рис. 9.1

Пример 1. Построить график функции $y=E(x)$, где $E(x)=[x]$ — целая часть числа x (наибольшее целое число, не превосходящее x).

$\triangle$ Пусть $x\in[n,n+1)$, где $n\in Z$, тогда $E(x)=n$. График функции $y=E(x)$ изображен на рис. 9.1. Стрелка на графике указывает на то, что точка в ее острие не принадлежит графику. $\blacktriangle$

Пример 2. Построить график функции $y = \operatorname{sign} \sin x$, где

$$\operatorname{sign} x = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad x > 0, \\ 0, & \text{если} \quad x = 0, \\ -1, & \text{если} \quad x < 1. \end{cases}$$

$\triangle$ Если $x \in (-\pi + 2k\pi, 2k\pi)$, где $k \in Z$, то $\sin x < 0$, и поэтому $\operatorname{sign} \sin x = -1$.

Если $x \in (2k\pi, \pi + 2k\pi)$, то $\sin x > 0$, и $\operatorname{sign} \sin x = 1$. Если $x = k\pi$, где $k \in Z$, то $y = 0$. График функции изображен на рис. 9.2. $\blacktriangle$

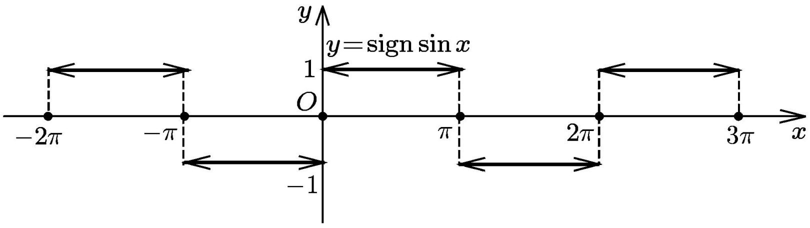

Рис. 9.2

График функции $y = f(x)$ иногда можно получить (см. таблицу) преобразованием известного графика другой функции $y = g(x)$.

Функция $y = f(x)$	Преобразование графика функции $y = g(x)$
$y = g(x) + A$	Сдвиг (параллельный перенос) вдоль оси ординат на A
$y = g(x - a)$	Сдвиг вдоль оси абсцисс на a
$y = g(-x)$	Симметрия относительно оси ординат
$y = -g(x)$	Симметрия относительно оси абсцисс
$y = Bg(x)$	Умножение каждой ординаты на B, где $B \neq 0$
$y = g(kx)$	Деление каждой абсциссы на k, где $k \neq 0$

Приведем примеры применения преобразований, указанных в таблице.

Пример 3. График квадратичной функции

$$y = ax^2 + bx + c, \quad a \neq 0, \tag{2}$$

можно получить сдвигом графика функции $y = ax^2$ вдоль оси Ox на $-\dfrac{b}{2a}$ и вдоль оси Oy на $c - \dfrac{b^2}{4a}$.

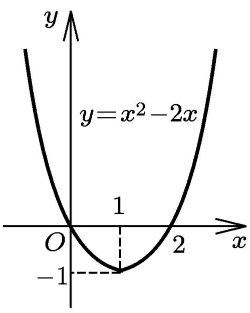

Рис. 9.3

$\triangle$ Действительно, выделяя полный квадрат, получаем

$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a}.$$

Поэтому графиком квадратичной функции (2) является парабола, получаемая сдвигом параболы $y = ax^2$. $\blacktriangle$

Например, график функции $y = x^2 - 2x$, изображенный на рис. 9.3, можно получить сдвигом графика $y = x^2$ вдоль оси Ox на 1 и вдоль оси Oy на -1, так как $x^2 - 2x = (x-1)^2 - 1$.

П р и м е р 4. График дробно-линейной функции

$$y = \frac{ax+b}{cx+d}, \quad c \neq 0, \quad ad - bc \neq 0, \tag{3}$$

можно получить преобразованием графика функции вида $y = \dfrac{k}{x}$.

△ В самом деле,

$$\frac{ax+b}{cx+d} = \frac{a\left(x+\frac{d}{c}\right)+b-\frac{ad}{c}}{c\left(x+\frac{d}{c}\right)} = \frac{a}{c} + \frac{bc-ad}{c^2}\frac{1}{x+\frac{d}{c}},$$

откуда следует, что график функции (3) можно получить сдвигом графика гиперболы $y = \dfrac{k}{x}$, где $k = \dfrac{bc-ad}{c^2}$, вдоль оси Ox на $-\dfrac{d}{c}$ и вдоль оси ординат на $\dfrac{a}{c}$. ▲

В частности, если $y = \dfrac{3-2x}{x+1}$, то $y = \dfrac{5-2(x+1)}{x+1} = -2 + \dfrac{5}{x+1}$. Поэтому график этой функции можно получить сдвигом графика гиперболы $y = \dfrac{5}{x}$ вдоль оси Ox на -1 и вдоль оси Oy на -2 (рис. 9.4). Отсюда следует, что график функции $y = \dfrac{3-2x}{x+1}$ симметричен относительно точки $(-1, -2)$.

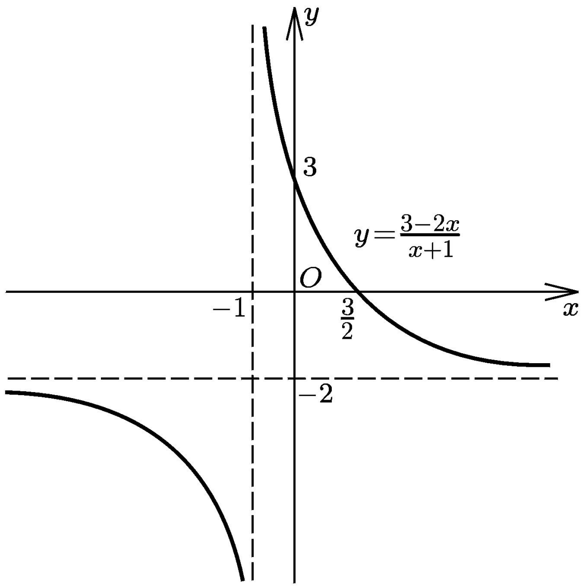

Рис. 9.4

П р и м е р 5. Построить график функции $y = \sqrt{-x}$.

△ График функции $y = \sqrt{-x}$ можно получить из графика функции

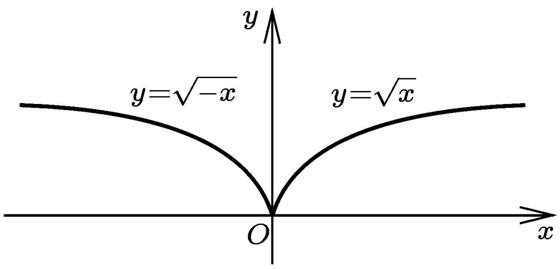

Рис. 9.5

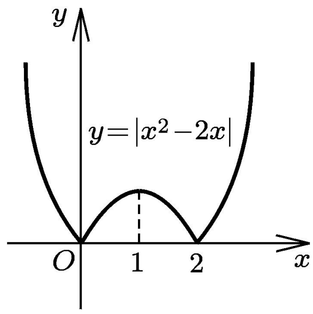

Рис. 9.6

$y = \sqrt{x}$ с помощью симметрии относительно оси ординат (рис. 9.5). ▲

Отметим еще, что график функции $y = |f(x)|$ можно получить из графика функции $y = f(x)$ следующим образом:

а) часть графика функции $f(x)$, лежащую выше оси Ox и на этой оси, оставить без изменения;

б) часть графика функции $f(x)$, лежащую ниже оси Ox, симметрично отразить относительно оси Ox.

Пример 6. Построить график функции $y = |x^2 - 2x|$.

△ Применяя указанный выше прием, строим график этой функции (рис. 9.6) с помощью графика функции $y = x^2 - 2x$ (рис. 9.3). ▲

5. Четные и нечетные функции. Функция f, определенная на множестве X, называется:

а) *четной*, если для любого $x \in$ X выполняются условия $-x \in X$ и $f(-x) = f(x)$;

б) *нечетной*, если для любого $x \in X$ выполняются условия $-x \in X$ и $f(-x) = -f(x)$.

Четными являются, например, следующие функции: $y = x^4$, $y = \cos\frac{x}{2}$, $y = \lg|x|$, $y = \frac{\sin x}{x}$, а нечетными — функции $y = \frac{1}{x^3}$, $y = \sin^5 2x$, $y = x^2 \operatorname{tg}\frac{x}{2}$, $y = \arcsin(\sin x)$.

График четной функции симметричен относительно оси ординат, а

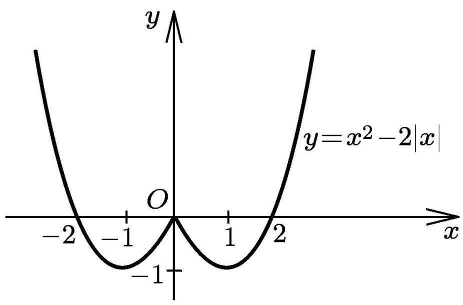

Рис. 9.7

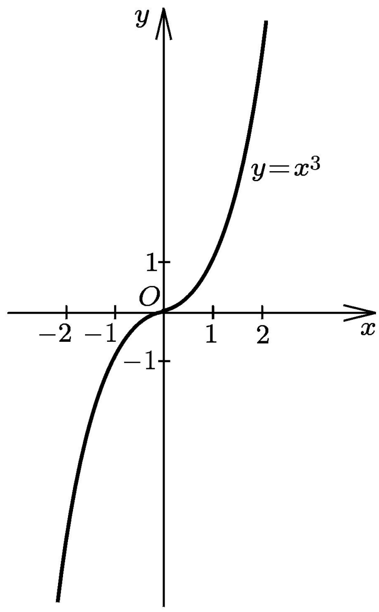

Рис. 9.8

график нечетной функции симметричен относительно начала координат.

Пример 7. Построить график функции $y = x^2 - 2|x|$.

△ Если $x \geqslant 0$, то $y = x^2 - 2x$ (см. рис. 9.3). Так как $x^2 - 2|x|$ — четная функция, то для построения части графика этой функции, соответствующей значениям $x \leqslant 0$, следует симметрично отразить график $y = x^2 - 2x$, $x \geqslant 0$, относительно оси Oy (рис. 9.7). ▲

На рис. 9.8 изображен график нечетной функции $y = x^3$.

6. Ограниченные и неограниченные функции. Функцию f называют *ограниченной снизу на множестве* $X \subset D(f)$, если существует число C_1 такое, что для любого $x \in$ X выполняется неравенство $f(x) \geqslant C_1$.

Используя символы $\exists$ и $\forall$, это определение можно записать так:

$$\exists C_1\colon\ \forall x \in X \to f(x) \geqslant C_1.$$

Аналогично функцию f называют *ограниченной сверху на множестве* $X \subset D(f)$, если

$$\exists C_2\colon\ \forall x \in X \to f(x) \leqslant C_2.$$

Функцию, ограниченную и сверху, и снизу на множестве X, называют *ограниченной на этом множестве.*

Функция f является ограниченной на множестве X тогда и только тогда, когда

$$\exists C > 0\colon\ \forall x \in X \to |f(x)| \leqslant C. \qquad (4)$$

Если неравенство $|f(x)| \leqslant C$ выполняется для всех $x \in D(f)$, говорят, что *функция f ограничена.*

Геометрически ограниченность функции f на множестве X означает, что график функции $y = f(x)$, $x \in X$, лежит в полосе $-C \leqslant y \leqslant C$.

Например, функция $y = \sin \dfrac{1}{x}$, определенная при $x \in R$, $x \neq 0$, ограничена, так как

$$\left|\sin \frac{1}{x}\right| \leqslant 1.$$

Функция f не ограничена на множестве X, если условие (4) не выполняется, т. е.

$$\forall C > 0 \quad \exists x_C \in X\colon\ |f(x_C)| \geqslant C. \qquad (5)$$

Если X $= D(f)$ и выполнено условие (5), то говорят, что *функция f не ограничена.*

Пример 8. Доказать, что функция $y = \dfrac{1}{x^2}$ не ограничена.

$\triangle$ Функция $\dfrac{1}{x^2}$ определена при $x \in R$, $x \neq 0$. Пусть C — любое положительное число, и пусть $x_C = \dfrac{1}{\sqrt{2C}}$, тогда $y(x_C) = 2C > C$, т. е. выполняется условие (5). $\blacktriangle$

Пусть Y — множество значений, которые функция f принимает на множестве $X \subset D(f)$. Тогда точную верхнюю грань множества Y называют *точной верхней гранью функции f на множестве X* и обозначают $\sup\limits_{x \in X} f(x)$, а точную нижнюю грань множества Y — *точной нижней гранью функции f на множестве X* и обозначают $\inf\limits_{x \in X} f(x)$. Если $X = D(f)$, то в этих определениях указание на множество X опускают.

Пусть существует точка $x_0 \in X \subset D(f)$ такая, что для всех $x \in X$ выполняется неравенство $f(x) \leqslant f(x_0)$. Тогда говорят, что функция f принимает в точке x_0 *наибольшее* (*максимальное*) *значение на множестве* X и пишут $f(x_0) = \max\limits_{x \in X} f(x)$. В этом случае $\sup\limits_{x \in X} f(x) = f(x_0)$.

Аналогично, если $\exists x_0 \in X \subset D(f)\colon\ \forall x \in X \to f(x) \geqslant f(x_0)$, то говорят, что функция f принимает в точке x_0 *наименьшее* (*минимальное*) *значение на множестве* X, и пишут $f(x_0) = \min\limits_{x \in X} f(x)$. В этом случае

$\inf\limits_{x\in X} f(x) = f(x_0)$.

Максимальные и минимальные значения называют *экстремальными.*

Например, если $f(x) = \sin x$, то $\sup\limits_{x\in R} f(x) = \max\limits_{x\in R} f(x) = f(x_k)$, где $x_k = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in Z$, $\inf\limits_{x\in R} f(x) = \min\limits_{x\in R} f(x) = f(\widetilde{x}_k)$, где $\widetilde{x}_k = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in Z$.

7. Монотонные функции. Функцию f называют возрастающей (неубывающей) на множестве $X \subset D(f)$, если для любых точек $x_1 \in X$, $x_2 \in X$ таких, что $x_1 < x_2$, выполняется неравенство $f(x_1) \leqslant f(x_2)$. Если это неравенство является строгим ($f(x_1) < f(x_2)$), то функцию f называют строго возрастающей на множестве X.

Таким образом, функция f называется:

а) *возрастающей (неубывающей) на множестве* X, если

$$\forall x_1 \in X \quad \forall x_2 \in X\colon\; x_1 < x_2 \to f(x_1) \leqslant f(x_2);$$

б) *строго возрастающей на множестве* X, если

$$\forall x_1 \in X \quad \forall x_2 \in X\colon\; x_1 < x_2 \to f(x_1) < f(x_2).$$

Аналогично функция f называется:

а) *убывающей (невозрастающей) на множестве* X, если

$$\forall x_1 \in X \quad \forall x_2 \in X\colon\; x_1 < x_2 \to f(x_1) \geqslant f(x_2);$$

б) *строго убывающей на множестве* X, если

$$\forall x_1 \in X \quad \forall x_2 \in X\colon\; x_1 < x_2 \to f(x_1) > f(x_2).$$

Убывающие и возрастающие функции объединяют названием *монотонные*, а строго возрастающие и строго убывающие — названием *строго монотонные.*

Если $X = D(f)$, то в этих определениях указание на множество X обычно опускают.

Пример 9. Доказать, что функция f строго возрастает на множестве X, если:

а) $f(x) = x^3$, $X = R$;

б) $f(x) = \sin x$, $X = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

$\triangle$ а) Если $0 \leqslant x_1 < x_2$, то $x_1^3 < x_2^3$, а если $x_1 < x_2 \leqslant 0$, то $0 \leqslant -x_2 < -x_1$, откуда

$$(-x_2)^3 < (-x_1)^3. \tag{6}$$

Так как x^3 — нечетная функция, то неравенство (6) можно записать в виде $-x_2^3 < -x_1^3$, откуда $x_1^3 < x_2^3$. Наконец, если $x_1 < 0$, а $x_2 > 0$, то $x_1^3 < x_2^3$. Таким образом, неравенство $x_1^3 < x_2^3$ справедливо для любых $x_1 \in R$, $x_2 \in R$ таких, что $x_1 < x_2$. Поэтому x^3 — строго возрастающая на R функция.

б) Пусть $-\dfrac{\pi}{2} \leqslant x_1 < x_2 \leqslant \dfrac{\pi}{2}$; тогда

$$\sin x_2 - \sin x_1 = 2\sin\frac{x_2 - x_1}{2}\cos\frac{x_2 + x_1}{2} > 0,$$

так как $0 < \dfrac{x_2 - x_1}{2} < \dfrac{\pi}{2}$, $-\dfrac{\pi}{2} < \dfrac{x_2 + x_1}{2} < \dfrac{\pi}{2}$.

Таким образом, неравенство $\sin x_2 > \sin x_1$ выполняется для $x_1, x_2 \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$, если $x_2 > x_1$. Следовательно, функция $\sin x$ строго возрастает на отрезке $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$. ▲

8. Периодические функции. Число $T \neq 0$ называют *периодом функции* f, если для любого $x \in D(f)$ значения $x + T$ и $x - T$ также принадлежат $D(f)$ и выполняется равенство

$$f(x - T) = f(x) = f(x + T).$$

Функцию, имеющую период T, называют *периодической с периодом* T.

Отметим, что если T — период функции f, то каждое число вида nT, где $n \in Z$, $n \neq 0$, также является периодом этой функции.

Примерами периодических функций могут служить тригонометрические функции. При этом число 2π — наименьший положительный период функций $\sin x$, $\cos x$, а π — наименьший положительный период функций $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$.

Пример 10. Доказать, что функция $f(x) = \sin\alpha x$, где $\alpha > 0$, является периодической, и найти ее наименьший положительный период.

△ Предположим, что f — периодическая с положительным периодом T функция. Тогда для любых $x \in R$ должно выполняться равенство

$$\sin\alpha x = \sin\alpha(x + T), \tag{7}$$

откуда при $x = 0$ получаем

$$\sin\alpha T = 0, \quad T = \frac{k\pi}{\alpha}, \quad \text{где} \quad k \in N.$$

Таким образом, положительными периодами функции $\sin\alpha x$ могут быть только числа $k\pi/\alpha$, где $k \in N$. Заметим, что число π/α не является периодом функции $\sin\alpha x$, так как в противном случае при всех $x \in R$ выполнялось бы равенство $\sin\alpha x = \sin\alpha(x + \pi/\alpha) = \sin(\pi + \alpha x) = -\sin\alpha x$, т. е. $\sin\alpha x = 0$, что невозможно.

Число $2\pi/\alpha$ — период функции $\sin\alpha x$, так как при любых $x \in R$ справедливо равенство $\sin\alpha x = \sin\alpha(x + 2\pi/\alpha)$.

Таким образом, $2\pi/\alpha$ — наименьший положительный период функции $\sin\alpha x$. ▲

9. Обратная функция. Пусть задана числовая функция $y = f(x)$, $x \in D(f)$. Тогда каждому числу $x_0 \in D(f)$ соответствует единственное число $y_0 = f(x_0) \in E(f)$. Нередко приходится по заданному значению функции y_0 находить соответствующее значение аргумента, т. е. решать относительно x уравнение

$$f(x) = y_0, \quad y_0 \in E(f). \tag{8}$$

Это уравнение может иметь не одно, а несколько и даже бесконечно много решений. Решениями уравнения (8) являются абсциссы всех точек, в которых прямая $y = y_0$ пересекает график функции $y = f(x)$.

Например, если $f(x) = x^2$, то уравнение

$$x^2 = y_0, \quad y_0 > 0,$$

имеет два решения: $x_0 = \sqrt{y_0}$ и $\widetilde{x}_0 = -\sqrt{y_0}$. Если $f(x) = \sin x$, то уравнение

$$\sin x = y_0, \quad |y_0| \leqslant 1,$$

имеет бесконечно много решений вида $x_n = (-1)^n x_0 + \pi n$, где $n \in Z$, x_0 — одно из решений этого уравнения.

Однако существуют функции, для которых уравнение (8) при каждом $y_0 \in E(f)$ однозначно разрешимо, т. е. имеет единственное решение $x_0 \in D(f)$. Этим свойством обладают, например, следующие функции:

а) $f(x) = 3x + 4$, $D(f) = R$;
б) $f(x) = x^3$, $D(f) = R$;
в) $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $D(f) = \{x \in R, \ x \neq 0\}$.

Если функция f такова, что каждое значение $y_0 \in E(f)$ она принимает только при одном значении $x_0 \in D(f)$, то эту функцию называют *обратимой.* Для такой функции уравнение

$$f(x) = y$$

можно при любом $y \in E(f)$ однозначно разрешить относительно x, т. е. каждому $y \in E(f)$ соответствует единственное значение $x \in D(f)$. Это соответствие определяет функцию, которую называют *обратной к функции* f и обозначают символом f^{-1}.

Заметим, что прямая $y = y_0$ для каждого $y_0 \in E(f)$ пересекает график обратимой функции $y = f(x)$ в единственной точке (x_0, y_0), где $f(x_0) = y_0$.

Обозначая, как обычно, аргумент обратной функции буквой x, а ее значения — буквой y, обратную для f функцию записывают в виде

$$y = f^{-1}(x), \quad x \in D(f^{-1}).$$

Для упрощения записи вместо символа f^{-1} будем употреблять букву g.

Отметим следующие свойства, которые показывают, как связаны данная функция и обратная к ней:

1) если g — функция, обратная к f, то и f — функция, обратная к g; при этом

$$D(g) = E(f), \quad E(g) = D(f),$$

т. е. область определения функции g совпадает с множеством значений функции f и наоборот;

2) для любого $x \in D(f)$ справедливо равенство

$$g(f(x)) = x,$$

а для любого $x \in E(f)$ справедливо равенство

$$f(g(x)) = x;$$

3) график функции $y = g(x)$ симметричен графику функции $y = f(x)$ относительно прямой $y = x$;

4) если нечетная функция обратима, то обратная к ней функция также является нечетной;

5) если f — строго возрастающая (строго убывающая) функция, то она обратима, причем обратная к ней функция g также является строго возрастающей (строго убывающей).

Свойства 1) и 2) следуют непосредственно из определения обратной функции, 4) и 5) — из определений обратной и соответственно нечетной и строго монотонной функции.

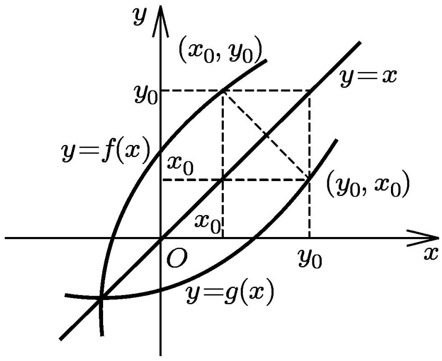

Рис. 9.9

Рассмотрим свойство 3). Пусть точка (x_0, y_0) принадлежит графику функции $y = f(x)$, т. е. $y_0 = f(x_0)$. Тогда $x_0 = g(y_0)$, т. е. точка (y_0, x_0) принадлежит графику обратной функции g. Так как точки (x_0, y_0) и (y_0, x_0) симметричны относительно прямой $y = x$ (рис. 9.9), то график функции $y = g(x)$ симметричен графику функции $y = f(x)$ относительно этой прямой.

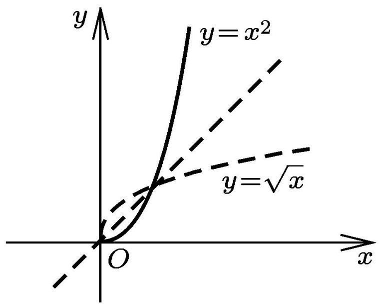

Рис. 9.10

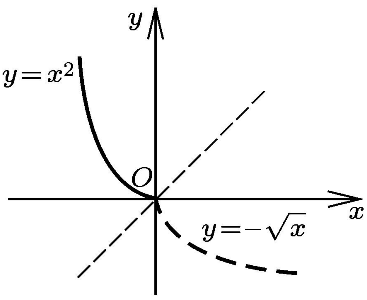

Рис. 9.11

На рис. 9.10 изображены графики взаимно обратных функций $y = x^2$, $x \geqslant 0$, и $y = \sqrt{x}$, а на рис. 9.11 — графики взаимно обратных функций $y = x^2$, $x \leqslant 0$, и $y = -\sqrt{x}$.

10. Неявные функции. Параметрически заданные функции. Пусть E — множество точек $M(x, y)$ плоскости Oxy. Если каждой точке $M \in E$ поставлено в соответствие по некоторому правилу (закону) число z, то говорят, что на множестве E задана *числовая функция от переменных x и y*, и пишут $z = f(x, y)$, $(x, y) \in E$.

Например, объем конуса v есть функция от переменных r и h, где r — радиус основания, h — высота конуса. Эта функция задается формулой $v = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h$.

Аналогично вводится понятие функции от трех и большего числа переменных.

Пусть функция $F(x, y)$ определена на некотором множестве точек плоскости. Рассмотрим уравнение

$$F(x, y) = 0. \tag{9}$$

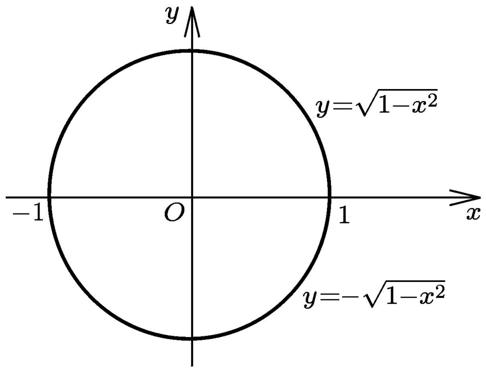

Рис. 9.12

Графиком уравнения (9) в прямоугольной системе координат называют множество всех точек плоскости, координаты которых удовлетворяют этому уравнению. Например, графиком уравнения

$$x^2 + y^2 - 1 = 0 \tag{10}$$

является единичная окружность (рис. 9.12).

Естественной является постановка вопроса о том, можно ли уравнение (9) однозначно разрешить относительно y, т. е. найти единственную функцию $y = f(x)$ такую, что $F(x, f(x)) = 0$, где x принимает значения из некоторого промежутка.

Обратимся к уравнению (10). Если $|x| > 1$, то не существует значений y таких, что пара чисел (x, y) удовлетворяет уравнению (10). Если $|x| \leqslant 1$, то, решая это уравнение относительно y, получаем

$$y = \pm\sqrt{1 - x^2}. \tag{11}$$

Таким образом, если $|x| < 1$, то из уравнения (10) y выражается через x неоднозначно: каждому значению x соответствуют два различных значения y, а именно $y_1 = -\sqrt{1 - x^2}$ и $y_2 = \sqrt{1 - x^2}$ ($y_1 = y_2$ при $x = -1$ и $x = 1$).

Отсюда следует, что всякая функция $y = f(x)$, которая в точке $x \in [-1, 1]$ принимает либо значение y_1, либо значение y_2, удовлетворяет уравнению (10), т. е.

$$x^2 + f^2(x) - 1 \equiv 0, \quad x \in [-1, 1].$$

Например, функция $y = f(x)$, принимающая значение y_1 при $x \in$ $\in [-1, \alpha)$, где $-1 < \alpha < 1$, и значение y_2 при $x \in [\alpha, 1]$, удовлетворяет уравнению (10). Меняя α, можно получить бесконечное множество функций, удовлетворяющих на отрезке $[-1, 1]$ уравнению (10).

Будем теперь рассматривать уравнение (10) в прямоугольнике

$$K_1 = \{(x, y)\colon\ -1 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 1\}.$$

В этом случае существует единственная функция $y = y_1 = \sqrt{1 - x^2}$, $-1 \leqslant x \leqslant 1$, удовлетворяющая уравнению (10) и такая, что $y \in [0, 1]$. Эту функцию называют неявной функцией, определяемой уравнением (10) в прямоугольнике K_1.

Аналогично в прямоугольнике $K_1 = \{(x, y)\colon\ -1 \leqslant x \leqslant 1, -1 \leqslant y \leqslant 0\}$ неявная функция, определяемая уравнением (10), задается формулой $y = y_2 = -\sqrt{1 - x^2},\ \ -1 \leqslant x \leqslant 1$.

Вернемся к уравнению (9). Пусть прямоугольник $K = \{(x, y)\colon |x - x_0| \leqslant a,\ |y - y_0| \leqslant b\}$ содержится в области определения функции $F(x, y)$, и пусть $F(x_0, y_0) = 0$. Если на отрезке $\Delta = [x_0 - a,\ x_0 + a]$ существует единственная функция $y = f(x)$ такая, что $f(x) \in [y_0 - b, y_0 + b]$ и

$$F(x, f(x)) \equiv 0, \quad x \in \Delta,$$

то говорят, что *уравнение* (9) *определяет в прямоугольнике* K *переменную* y *как неявную функцию переменной* x.

Достаточные условия существования неявной функции и другие вопросы, связанные с неявными функциями, рассматриваются в § 28.

Функция одной переменной может быть задана не только в явном виде $y = f(x)$ или неявно уравнением $F(x, y) = 0$, но также параметрически. Этот способ задания состоит в следующем.

Пусть функции $x = \varphi(t)$ и $\psi(t)$ определены на некотором множестве E, и пусть E_1 — множество значений функции φ. Предположим, что функция φ обратима на множестве E, и пусть $t = \varphi^{-1}(x)$ — обратная к ней функция. Тогда на множестве E_1 определена сложная функция $y = \psi(\varphi^{-1}(x)) = f(x)$, которую называют *параметрически заданной* формулами (уравнениями) $x = \varphi(t),\ \ y = \psi(t)$.

Например, уравнения $x = \cos t,\ \ y = \sin t$, где $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, определяют параметрически заданную функцию $y = f(x)$. В данном случае $t = \arccos x,\ \ y = \sin(\arccos x) = \sqrt{1 - x^2}$.