Лекция № 7. ТИПОВЫЕ ЗАКОНЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

1.7.1 Показательное (экспоненциальное) распределение

Случайная величина T имеет ***показательное*** распределение, если ее плотность вероятности:

$$f(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t}, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}, \qquad (1.35)$$

функция распределения:

$$F(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda t}, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}, \qquad (1.36)$$

числовые характеристики:

$$\mathrm{M}[T] = 1/\lambda, \quad \mathrm{D}[T] = 1/\lambda^2. \qquad (1.37)$$

1.7.2. Равномерное распределение

СВ X имеет равномерное распределение на участке $[a, b]$, если ее плотность вероятности:

$$f(x) = \begin{cases} 1/(b-a), & a \leq x \leq b \\ 0, & x < a,\ x > b \end{cases}, \qquad (1.38)$$

функция распределения:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ (x-a)/(b-a), & a \leq x \leq b \\ 1, & x > b \end{cases}, \qquad (1.39)$$

числовые характеристики:

$$M[X] = \frac{a+b}{2}, \qquad D[X] = \frac{(b-a)^2}{12}. \qquad (1.40)$$

1.7.3. Нормальный закон распределения

СВ X имеет нормальное распределение, если ее
плотность вероятности:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{ -\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2} \right\}, \qquad (1.41)$$

функция распределения:

$$\mathrm{F(x)} = 0,5 + 0,5 \cdot \Phi\left(\frac{x-m}{\sigma} \right), \qquad (1.42)$$

где $\Phi(x)$ — функция Лапласа: $\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$.

Значения функции Лапласа приведены в Приложении. При использовании таблицы значений функции Лапласа следует учитывать :

$$\Phi(-x) = -\Phi(x), \quad \Phi(0) = 0, \quad \Phi(\infty) = 1.$$

Числовые характеристики:

$$\mathrm{M}[X] = m, \quad \mathrm{D}[X] = \sigma^2. \qquad (1.43)$$

1.8. ЗАКОН РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ФУНКЦИИ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

Рассмотрим функцию одного случайного аргумента $Y = \varphi(X)$. Если X - непрерывная случайная величина, то плотность вероятности $g(y)$ величины Y определяется по формуле

$$g(y) = \sum_{j=1}^{k} f(\psi_j(y)) \cdot \left|\psi'_j(y)\right|, \qquad (1.44)$$

где $f(\cdot)$ - плотность вероятности величины X;

$\psi_j(y)$ - обратные функции функции $\varphi(x)$;

k - число обратных функций для данного y.

Весь диапазон значений Y необходимо разбить на интервалы, в которых число k обратных функций постоянно, и определить вид $g(y)$ по формуле (1.44) для каждого интервала.

Если X - дискретная случайная величина, принимающая значения x_i, то величина Y будет принимать дискретные значения $y_i = \varphi(x_i)$ с вероятностями $p(y_i) = p(x_i)$.

Пример 8.1. Определить плотность вероятности величины $Y = X^2$, если X - случайная величина, равномерно распределенная на интервале [-1, 2] .

Решение. Так как X равномерно распределена в интервале [-1, 2], т.е. ее плотность вероятности равна (см. пп.1.7.2):

$$f(x)=\begin{cases}1/3, & a\le x\le b\\ 0, & x<a,\ x>b\end{cases},$$

Построим график величины $Y = X^2$ для x в интервале [-1, 2] и в зависимости от числа k обратных функций выделим следующие интервалы для Y (рис. 1.1):

$(-\infty, 0)$ $k = 0$,

$(0, 1)$ $k = 2$,

$(1, 4)$ $k = 1$,

$(4, +\infty)$ $k = 0$.

Так как на интервалах $(-\infty, 0)$ и $(4, +\infty)$ обратная функция не существует, то $g(y)=0$.

В интервале (0,1) две обратных функции:

$\psi_1(y) = +\sqrt{y}$ и $\psi_2(y) = -\sqrt{y}$. По формуле (10.1) получим

$$g(y)=f_x(\psi_1(y))\cdot|\psi_1'(y)|+f_x(\psi_2(y))\cdot|\psi_2'(y)|=$$

$$=f_x(\sqrt{y})\cdot\frac{1}{2\sqrt{y}}+f_x(-\sqrt{y})\cdot\frac{1}{2\sqrt{y}}=\frac{1}{3\sqrt{y}}.$$

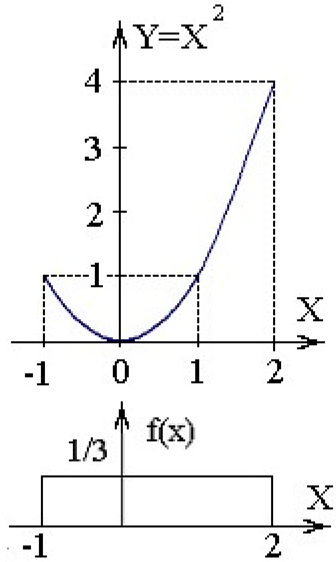

Рис. 1.1

В интервале (1,4) одна обратная функция $\psi_1(y) = +\sqrt{y}$, следовательно,

$$g(y)=f_x(\psi_1(y))\cdot|\psi_1'(y)|=f_x(\sqrt{y})\cdot\frac{1}{2\sqrt{y}}=\frac{1}{6\sqrt{y}}.$$

Таким образом, плотность вероятности величины Y равна:

$$g(y)=\begin{cases}0, & y<0\\ \dfrac{1}{3\sqrt{y}}, & 0\le y<1,\\ \dfrac{1}{6\sqrt{y}}, & 1\le y<4,\\ 0, & y\ge 4.\end{cases}$$

1.9. ДВУМЕРНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

Функцией распределения двумерной случайной величины (X, Y) называется вероятность совместного выполнения двух событий $\{X<x\}$ и $\{Y<y\}$:

$$F(x,y)=\mathrm{P}\big(\{X<x\}\cap\{Y<y\}\big). \qquad (1.45)$$

Свойства двумерной функции распределения:

1. $0 \le F(x, y) \le 1$.

2. $F(x, +\infty) = F_1(x)$; $F(+\infty, y) = F_2(y)$; $F(+\infty, +\infty) = 1$.

3. $F(-\infty, y) = F(x, -\infty) = F(-\infty, -\infty) = 0$.

4. $F(x_1, y) \le F(x_2, y)$, если $x_2 > x_1$;

$F(x, y_1) \le F(x, y_2)$, если $y_2 > y_1$.

Функция распределения может задаваться для непрерывных и дискретных случайных величин.

Для непрерывных случайных величин существует плотность распределения или дифференциальный закон распределения:

$$f(x,y) = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{P(\{x \le X < X + \Delta x\} \cap \{y \le Y < y + \Delta y\}}{\Delta x \Delta y} = \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y}. \qquad (1.46)$$

Свойства двумерной плотности.

1. $f(x, y) \ge 0$.

2. $F(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(x,y)dxdy$. (1.47)

3. $\mathrm{P}\{(X,Y) \in D\} = \iint_{(D)} f(x,y)dxdy$. (1.48)

4. Условие нормировки. $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dxdy = 1$. (1.49)

5. $f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy$; $f_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx$. (1.50)

Для дискретных случайных величин (X, Y) закон распределения задается матрицей вероятностей, содержащей вероятности p_{ij} появления всех возможных пар значений (x_i, y_j):

$$p_{ij} = \mathrm{P}(X = \mathrm{x_i} \cap Y = y_j), \qquad (1.51)$$

удовлетворяющих условию

$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M} p_{ij} = 1. \qquad (1.52)$$

Одномерные ряды вероятностей составляющих X, Y определяются по формулам

$$p_{i*} = P(X = x_i) = \sum_{j=1}^{M} p_{ij}, \qquad i = 1,\ldots,N; \qquad (1.53)$$

$$p_{*j} = P(Y = y_i) = \sum_{i=1}^{N} p_{ij}, \qquad j = 1,\ldots,M. \qquad (1.54)$$

Условным законом распределения называется распределение одной случайной величины, найденное при условии, что другая случайная величина приняла определенное значение.

Условные плотности для непрерывных составляющих X и Y определяются по формулам

$$f(x/y) = f(x, y)/f_2(y), \quad f_2(y) \neq 0; \tag{1.55}$$

$$f(y/x) = f(x, y)/f_1(x), \quad f_1(x) \neq 0. \tag{1.56}$$

Условные ряды вероятностей для дискретных составляющих X и Y определяются по формулам

$$p_{i/j} = \mathrm{P}(X = x_i/Y = y_j) = p_{ij}/\mathrm{P}(Y = y_j), \quad i = 1, ..., N; \tag{1.57}$$

$$p_{j/i} = \mathrm{P}(Y = y_j/X = x_i) = p_{ij}/\mathrm{P}(X = x_i), \quad j = 1, ..., M. \tag{1.58}$$

Теорема умножения законов распределений:

для непрерывных величин -

$$f(x, y) = f_1(x) \cdot f(y/x) = f_2(y) \cdot \mathrm{f(x/y)} \tag{1.59}$$

для дискретных величин -

$$p_{ij} = p_{i*} \cdot p_{j/i} = p_{*j} \cdot p_{i/j} . \tag{1.60}$$

Условия независимости случайных величин:

для непрерывных – $f(x, y) = f_1(x)f_2(y)$, (1.61)

для дискретных - $p_{ij} = p_i \cdot p_j$, для $\forall\ i, j.$ (1.62)

Пример 9.1. Двумерная случайная величина (X, Y) распределена по закону, приведенному в таблице:

y_j	x_i	
	$x_1 = 0$	$x_2 = 1$
$y_1 = -1$	0,1	0,2
$y_2 = 0$	0,2	0,3
$y_3 = 1$	0	0,2

Определить одномерные ряды вероятностей величин X и Y, условный ряд вероятностей величины X при условии, что $Y = 0$. Исследовать зависимость случайных величин X и Y.

Решение. Определим ряды вероятностей X и Y по формулам (1.53) и (1.54), т.е. выполним суммирование по столбцам и по строкам:

x_i	0	1
p_{i*}	0,3	0,7

y_j	-1	0	1
p_{*j}	0,3	0,5	0,2

Условный ряд X при $Y = 0$ получаем по формуле (1.57):

x_i	0	1
$p_{i/Y=0}$	0,4	0,6

Величины X и Y зависимы, так как

$\mathrm{P}(X = 0,\ Y = 0) \neq \mathrm{P}(X = 0) \cdot \mathrm{P}(Y = 0)$,

$0{,}2 \neq 0{,}3 \cdot 0{,}5$.