

Лекция №8. Непрерывные случайные величины и их числовые характеристики

Непрерывная случайная величина (НСВ). Плотность вероятности.

Вероятность попадания непрерывной случайной величины X на участок от x до $x+\Delta x$ равна приращению функции распределения на этом участке:

$$P\{x \leq X < x+\Delta x\} = F(x+\Delta x) - F(x).$$

Плотность вероятности на этом участке определяется отношением

$$f(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{P\{x \leq X < x+\Delta x\}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} = \frac{dF(x)}{dx}. \quad (1.27)$$

Плотностью распределения (или плотностью вероятности) непрерывной случайной величины X в точке x называется производная ее функции распределения в этой точке и обозначается $f(x)$. График плотности распределения называется кривой распределения.

Пусть имеется точка x и прилегающий к ней отрезок dx . Вероятность попадания случайной величины X на этот интервал равна $f(x)dx$. Эта величина называется **элементом вероятности**.

Вероятность попадания случайной величины X на произвольный участок $[a, b[$ равна сумме элементарных вероятностей на этом участке:

$$P\{a \leq X < b\} = \int_a^b f(x)dx. \quad (1.28)$$

Это соотношение позволяет выразить функцию распределения $F(x)$ случайной величины X через ее плотность:

$$F(x) = P\{X < x\} = P\{-\infty < X < x\} = \int_{-\infty}^x f(x)dx. \quad (1.29)$$

В геометрической интерпретации $F(x)$ равна площади, ограниченной сверху кривой плотности распределения $f(x)$ и лежащей левее точки x .

Основные свойства плотности распределения:

1. Плотность распределения неотрицательна: $f(x) \geq 0$.

$$2. \text{ Условие нормировки: } \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1. \quad (1.30)$$

Пример 5.1. По одной и той же стартовой позиции противника производится пуск из пяти ракет, причем вероятность попадания в цель при каждом пуске одной ракеты равна 0,8. Построить ряд распределения числа попаданий.

Решение. Случайная величина X (число попаданий в цель) может принимать следующие значения: 0, 1, 2, 3, 4, 5. Найдем вероятность принятия величиной X этих значений, используя формулу Бернулли:

$$P\{X = 0\} = (1 - p)^5 = 0,2^5 = 0,00032 ,$$

$$P\{X = 1\} = C_5^1 \cdot p \cdot (1 - p)^4 = 5 \cdot 0,8 \cdot 0,2^4 = 0,0064 ,$$

$$P\{X = 2\} = C_5^2 \cdot p^2 \cdot (1 - p)^3 = 10 \cdot 0,8^2 \cdot 0,2^3 = 0,0512 ,$$

$$P\{X = 3\} = C_5^3 \cdot p^3 \cdot (1 - p)^2 = 10 \cdot 0,8^3 \cdot 0,2^2 = 0,2048 ,$$

$$P\{X = 4\} = C_5^4 \cdot p^4 \cdot (1 - p) = 5 \cdot 0,8^4 \cdot 0,2 = 0,4096 ,$$

$$P\{X = 5\} = p^5 = 0,8^5 = 0,32768 .$$

Ряд распределения имеет вид:

x_i	0	1	2	3	4	5
p_i	0,00032	0,0064	0,0512	0,2048	0,4096	0,32768

Пример 5.2. Случайная величина X распределена по закону, определяемому плотностью вероятности вида

$$f(x) = \begin{cases} c \cdot \cos x, & -\pi/2 \leq x \leq \pi/2 \\ 0, & |x| > \pi/2. \end{cases}$$

Найти константу c , функцию распределения $F(x)$ и вычислить $P\{|x| < \pi/4\}$.

Решение. Константу c вычислим исходя из условия нормировки:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} c \cdot \cos x dx = c \cdot \sin x \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = c + c = 2 \cdot c = 1 ,$$

откуда $c = 0,5$.

Так как плотность вероятности задана различными формулами на разных интервалах, то и функцию распределения будем искать для каждого интервала в отдельности.

$$\text{Для } x < -\pi/2 \quad F(x) = \int_{-\infty}^x f(y)dy = \int_{-\infty}^x 0dy = 0 ,$$

$$\text{для } -\pi/2 \leq x \leq \pi/2 \quad F(x) = \int_{-\infty}^{-\pi/2} 0dy + \int_{-\pi/2}^x \frac{\cos y}{2} dy = \frac{\sin y}{2} \Big|_{-\pi/2}^x = \frac{1 + \sin x}{2} ,$$

$$\text{для } x > \pi/2 \quad F(x) = \int_{-\infty}^{-\pi/2} 0dy + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos y}{2} dy + \int_{\pi/2}^x 0dy = 1 .$$

Окончательно имеем

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < -\pi/2 \\ (1 + \sin x)/2, & |x| \leq \pi/2 \\ 1, & x > \pi/2. \end{cases}$$

$$\text{Вероятность } P\{|x| < \pi/4\} = F\left(\frac{\pi}{4}\right) - F\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{1}{2}\right) - \left(-\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} .$$

1.6. ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

Одна из основных характеристик СВ - **математическое ожидание**:

$$m_X = M[X] = \begin{cases} \sum_i x_i \cdot P\{X = x_i\} \text{ для ДСВ} \\ \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)dx \text{ для НСВ.} \end{cases} \quad (1.31)$$

Математическое ожидание характеризует среднее значение СВ и обладает следующими свойствами:

1. $M[c] = c$.
2. $M[c \cdot X] = c \cdot M[X]$.

$$3. M[X+c] = M[X]+c.$$

$$4. M[X_1+X_2] = M[X_1]+M[X_2].$$

Модой случайной величины называется ее наиболее вероятное значение, т.е. то значение, для которого вероятность p_i (для дискретной СВ) или $f(x)$ (для непрерывных СВ) достигают максимума. Обозначения: Mx , Mo .

Медианой случайной величины X называется такое ее значение, для которого выполняется условие $P\{X < Me\} = P\{X \geq Me\}$. Медиана, как правило, существует только для непрерывных случайных величин.

Квантилью χ_p случайной величины X является такое ее значение, для которого выполняется условие $P\{X < \chi_p\} = F(\chi_p) = p$.

Начальный момент s -го порядка СВ X есть математическое ожидание s -й степени этой случайной величины: $\alpha_s = M[X^s]$.

Центрированной случайной величиной называется отклонение СВ от математического ожидания:

$$\overset{\circ}{X} = X - m_X, \quad M[\overset{\circ}{X}] = M[X - m_X] = 0.$$

Моменты центрированной случайной величины - *центральные моменты*. **Центральный момент** порядка s СВ X есть математическое ожидание s -й степени центрированной случайной величины:

$$\mu_s = M[\overset{\circ}{X}^s] = M[(X - m_X)^s].$$

Для любой случайной величины центральный момент первого порядка равен 0.

Дисперсия случайной величины есть математическое ожидание квадрата соответствующей центрированной случайной величины.

Расчетные формулы:

$$D[X] = \begin{cases} \sum_i (x_i - m_X)^2 \cdot P\{X = x_i\} = \sum_i x_i^2 \cdot P\{X = x_i\} - (m_X)^2, & \text{для ДСВ} \\ \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_X)^2 \cdot f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f(x) dx - (m_X)^2, & \text{для НСВ} \end{cases} \quad (1.32)$$

Вычислить дисперсию можно и через второй начальный момент:

$$D[X] = M[X^2] - m_X^2.$$

Дисперсия случайной величины характеризует степень рассеивания (разброса) значений случайной величины относительно ее математического ожидания и обладает следующими свойствами:

1. $D[c] = 0$.
2. $D[X+c] = D[X]$.
3. $D[c \cdot X] = c^2 \cdot D[X]$.
 $\sigma[c \cdot X] = c \cdot \sigma[X]$.

Средним квадратическим отклонением (СКО) СВ X называется характеристика

$$\sigma_X = \sigma[X] = \sqrt{D[X]}. \quad (1.33)$$

СКО измеряется в тех же физических единицах, что и СВ, и характеризует ширину диапазона значений СВ.

Правило 3 σ . Практически все значения СВ находятся в интервале:

$$[m - 3\sigma; m + 3\sigma]. \quad (1.34)$$

Пример 6.1. Из партии численностью 25 изделий, среди которых имеется шесть нестандартных, случайным образом выбраны три изделия. Найти математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение нестандартных изделий, содержащихся в выборке.

Решение. По условию задачи СВ X принимает следующие значения: $x_1=0$; $x_2=1$; $x_3=2$; $x_4=3$. Вероятность того, что в этой выборке окажется ровно i ($i = 0, 1, 2, 3$) нестандартных изделий, вычисляется по формуле

$$p_i = P\{X = x_i\} = \frac{C_6^i \cdot C_{19}^{3-i}}{C_{25}^3},$$

откуда

$$p_1=0,41; p_2=0,43; p_3=0,11; p_4=0,05.$$

Дисперсию определим по формулам

$$D[X] = M[X^2] - (M[X])^2,$$

$$M[X] = 0 \cdot 0,41 + 1 \cdot 0,43 + 2 \cdot 0,11 + 3 \cdot 0,05 = 0,8,$$

$$M[X^2] = 0 \cdot 0,41 + 1 \cdot 0,43 + 2^2 \cdot 0,11 + 3^2 \cdot 0,05 = 1,32,$$

$$D[X] = 1,32 - (0,8)^2 = 0,68.$$

$$\text{Тогда } \sigma[X] = \sqrt{D[X]} = 0,82.$$

Пример 6.2. Непрерывная СВ распределена по закону Лапласа:

$$f(x) = b \cdot e^{-|x|}.$$

Найти коэффициент b , математическое ожидание $M[X]$, дисперсию $D[X]$, среднее квадратическое отклонение $\sigma[X]$.

Решение. Для нахождения коэффициента b воспользуемся свойством нормировки плотности распределения $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 2 \cdot b \int_0^{\infty} e^{-x} dx = 2 \cdot b = 1$, откуда $b = 1/2$. Так как функция $x \cdot e^{-|x|}$ - нечетная, то $M[X] = 0,5 \cdot \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot e^{-|x|} dx = 0$, дисперсия $D[X]$ и СКО $\sigma[X]$ соответственно равны:

$$D[X] = 0,5 \cdot \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot e^{-|x|} dx = 2 \cdot 0,5 \cdot \int_0^{\infty} x^2 \cdot e^{-x} dx = 2,$$

$$\sigma[X] = \sqrt{D[X]} = \sqrt{2}.$$

1.7. ТИПОВЫЕ ЗАКОНЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

1.7.1 Показательное (экспоненциальное) распределение

Случайная величина T имеет **показательное** распределение, если ее плотность вероятности:

$$f(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t}, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}, \quad (1.35)$$

функция распределения:

$$F(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda t}, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}, \quad (1.36)$$

числовые характеристики:

$$M[T] = 1/\lambda, \quad D[T] = 1/\lambda^2. \quad (1.37)$$

1.7.2. Равномерное распределение

СВ X имеет равномерное распределение на участке $[a, b]$, если ее плотность вероятности:

$$f(x) = \begin{cases} 1/(b-a), & a \leq x \leq b \\ 0, & x < a, x > b \end{cases}, \quad (1.38)$$

функция распределения:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ (x-a)/(b-a), & a \leq x \leq b, \\ 1, & x > b \end{cases} \quad (1.39)$$

числовые характеристики:

$$M[X] = \frac{a+b}{2}, \quad D[X] = \frac{(b-a)^2}{12}. \quad (1.40)$$

1.7.3. Нормальный закон распределения

СВ X имеет нормальное распределение, если ее плотность вероятности:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right\}, \quad (1.41)$$

функция распределения:

$$F(x) = 0,5 + 0,5 \cdot \Phi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right), \quad (1.42)$$

где $\Phi(x)$ — функция Лапласа: $\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$.

Значения функции Лапласа приведены в Приложении. При использовании таблицы значений функции Лапласа следует учитывать :

$$\Phi(-x) = -\Phi(x), \quad \Phi(0) = 0, \quad \Phi(\infty) = 1.$$

Числовые характеристики:

$$M[X] = m, \quad D[X] = \sigma^2. \quad (1.43)$$