НЕОДНОРОДНЫЕ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

СИСТЕМЫ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений n-го порядка

$$Y' = F(Y) \tag{1}$$

или

$$\frac{dY}{dx} = F(Y), \tag{2}$$

где

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ . \\ . \\ . \\ y_n \end{pmatrix}, F(Y) = \begin{pmatrix} f_1(y_1, y_2, ..., y_n) \\ f_2(y_1, y_2, ..., y_n) \\ . \\ . \\ . \\ f_n(y_1, y_2, ..., y_n) \end{pmatrix} \tag{3}$$

Задачей Коши для этой системы называется следующая задача: найти такое решение $Y = Y(x)$ системы (1), что $Y(x_0) = Y_0$, где Y_0- некоторый постоянный вектор.

Вектор-функция $Y = Y(x, C)$, зависящая от произвольного вектора C, называется общим решением системы (0.1), если:

a)при любом векторе C вектор-функция $Y = Y(x, C)$ является решением;

b)какова бы ни была начальная данные $(x_0, Y_0$, существует такой вектор C_0, что $Y(x_0, C_0) = Y_0$.

Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений n-го порядка (1), и пусть вектор-функция $Y = Y(x)$- решение системы, определчнное на промежутке $[a, b]$. Множество точек $Y(x), x \in [a, b]$ есть кривая в пространстве R^n. Эту кривую называют фазовой траекторией системы (или просто траекторией, или фазовой кривой),а пространство R_n , в котором расположены фазовые траектории, называют фазовым пространством системы.

Интегральная кривая системы определяется уравнением $Y = Y(x), x \in [a, b]$ и изображается в $(n + 1)-$ мерном пространстве. Фазовая траектория является проекцией интегральной кривой на фазовое пространство..... 4.3.Существование и единственность решения задачи Коши

Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений n-го порядка (1).

. Пусть задана следующая задача Коши для этой системы

$$Y' = F(Y), Y(x_0) = Y_0 \tag{4}$$

Справедлива следующая теорема о существовании и единственности решения задачи Коши.

Теорема 1. Пусть в области D из R^n непрерывны все компоненты вектора правой части $F(Y)$ и их частные производные по $\frac{\partial f_i}{\partial y_j}$. Тогда, какова бы ни была начальная точка $(x_0, Y_0) = (x_0, y_1^0, y_2^0, ..., y_n^0) \in D$, существует такой отрезок $(x_0 = h; x_0 + h)$, что задача Коши (4) имеет единственное решение $Y = Y(x)$..

Важно понимать, что эта теорема имеет локальный характер: существование решения $Y = Y(x)$ гарантируется лишь в достаточно малой окрестности точки x_0. Важно также понимать, что теорема содержит только достаточные условия существования и единственности решения ? при нарушении условий теоремы задача Коши может иметь или не иметь решений, может иметь несколько решений.

ЛИНЕЙНЫt СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Следующая система дифференциальных уравнений называется линейной системой:

$$\begin{cases} \dot{y_1} = a_{11}(x)y_1 + a_{12}(x)y_2 + \ldots + a_{1n}(x)y_n + f_1(x), \\ \dot{y_2} = a_{21}(x)y_1 + a_{22}(x)y_2 + \ldots + a_{2n}(x)y_n + f_2(x), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dot{y_n} = a_{n1}(x)y_1 + a_{n2}(x)y_2 + \ldots + a_{nn}(x)y_n + f_n(x). \end{cases} \tag{5}$$

При описании линейных систем дифференциальных уравнений удобнее пользоваться векторной (матричной) формой записи.

Введем следующие обозначия

$$A(x) = \begin{pmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \dots & a_{1n}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & \dots & a_{2n}(x) \\ . & & & \\ . & & & \\ . & & & \\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & \dots & a_{nn}(x) \end{pmatrix}, f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ . \\ . \\ . \\ f_n(x) \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Теперь систему (5) можем написать в следующем виде:

$$Y' = A(x)Y + f(x) \tag{7}$$

Теорема 2. Пусть $a_{ij}(x)$ и $f_i(x)$ непрерывны на отрезке $[a, b]$. Тогда какова бы ни была начальная точка (x_0, Y_0) из R^{n+1}, задача Коши

$$Y' = A(x)Y + f(x), Y(x_0) = Y_0 \tag{8}$$

имеет единственное на $[a, b]$, решение $Y = Y(x)$.

Важно отметить, что для линейной системы дифференциальных уравнений разрешимость задачи Коши глобальная: решение существует всюду, где непрерывны коэффициенты и неоднородность системы.

Нетрудно показать, что для решений линейных систем дифференциальных уравнений

$$Y' = A(x)Y + f(x) \tag{9}$$

$$Y' = A(x)Y \tag{10}$$

справедливо:

1) если Y_1 и Y_2 два решения однородной системы, то при произвольных значениях постоянных C_1 и C_2 функция $Y = C_1Y_1 + C_2Y_2$ является решением этой системы;

2) если Y_1 и Y_2 два решения неоднородной системы, то функция $Y = Y_1 + Y_2$ является решением однородной системы;

3) однородная система дифференциальных уравнений (10) имеет тривиальное (нулевое) решение $Y = 0$. Это тривиальное решение называют точкой покоя системы или положением равновесия системы. При изучении систем линейных дифференциальных уравнений важную роль играют свойства линейной зависимости и линейной независимости решений и связанный с этими свойствами определитель Вронского.

Рассмотрим линейную однородную систему обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$Y' = A(x)Y \tag{11}$$

Матрица Φ , столбцами которой являются n линейно независимые на $[a, b]$ решения

$$Y_1, Y_2, ..., Y_n$$

однородной линейной системы называется фундаментальной матрицей решений системы, определитель этой матрицы называется определителем Вронского.

Фундаментальная матрица решений системы имеет вид

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} y_{11}(x) & y_{12}(x) & \dots & y_{1n}(x) \\ y_{21}(x) & y_{22}(x) & \dots & y_{2n}(x) \\ . & & & \\ . & & & \\ . & & & \\ y_{n1}(x) & y_{n2}(x) & \dots & y_{nn}(x) \end{pmatrix}, \tag{12}$$

У любой однородной линейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений существует фундаментальная матрица решений. Известно, что функции решения

$$Y_1, Y_2, ..., Y_n$$

линейно независимы тогда и только тогда когда соответствующий определитель Вронского отличен от нуля.

Рассмотрим линейную однородную систему обыкновенных дифференциальных уравнений n-го порядка (11). Справедлива следующая теорема о структуре общего решения этой системы.

Теорема 3. Если матрица $A(x)$ непрерывна на $[a, b]$ то общее решение системы (11) имеет вид

$$Y(x) = \Phi(x)C = C_1Y_1(x) + C_2Y_2(x) + ... + C_nY_n(x),$$

где $\Phi(x)-$ фундаментальная матрица решений однородной линейной системы, $C-$произвольный постоянный вектор-столбец.

НЕОДНОРОДНЫЕ СИСТЕМЫ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ И СПЕЦИАЛЬНОЙ ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ

Неоднородная система линейных дифференциальных уравне- ний с постоянными коэффициентами - это система вида

$$Y' = AY + f(x), \tag{13}$$

где $A = (a_{ij})$ заданная квадратная числовая матрица порядка п, а $f(x)-$ заданная матрица-столбец, элементами которой являются функции $f_i(x), i = 1, 2, ..., n$. Для системы (0.13) справедлива следующая теорема.

Теорема 4. Общее решение $Y_o(x)$ неоднородной линейной системы (13) равно сумме общего решения $Y_{00}(x)$ соответствую- щей однородной системы

$$Y' = A(x)Y \tag{14}$$

и любого частного решения $Y(x)$ данной неоднородной системы.

Мы знаем как найти общее решение однородной системы.Поэтому покажем методы нахождения частного решения неоднородной системы,когда правая часть системы имеет специальный вид.

Рассмотрим систему (13), у которой $f(x)$ имеет "специальный"вид, а именно:

$$f(x) = \big(P_m(x) cos\beta x + Q_l sin\beta x\big)e^{\alpha x}, \tag{15}$$

где $P_m(x)-$ многочлен m-й степени с векторными коэффициентами, т.е.

$P_m(x) = \gamma_0 x^m + \gamma_1 x^{m-1} + ... + \gamma_{m-1}x + \gamma_m -$, γ_i заданные числовые вектор-столбцы ; $Q_l(x)-$Ц многочлен $l-$й степени того же вида.

Правая часть $f(x)$ вида (15) называется векторным квазимногочленом.

Для нахождения частного решения Y неоднородной системы (13), правая часть которой $f(x)$ является векторным квазимногочленом, справедливо утверждение.

Утверждение 1. Частное решение Y системы (13), правая часть которой имеет вид (15), может быть найдено в виде

$$Y(x) = \big(P_{n_1+r}(x) cos\beta x + Q_{n_1+r} sin\beta x\big)e^{\alpha x}, \tag{16}$$

где $n_1 = max(m; l)$, $r = 0$, если число $\lambda_0 = \alpha + i\beta$ не является собственным значением матрицы A, и r равно алгебраической кратности λ_0, если λ_0 является собственным значением матрицы ; $P_{n_1+r}(x)$ и $Q_{n_1+r}(x)-$ неизвестные многочлены с векторными коэффициентами степени n_1+r, коэффициенты которых находятся методом неопределенных коэффициентов.

Для системы (13) так же, как и для линейного уравнения n-го порядка, справедлив принцип суперпозиции, который позволяет распространить предложенный выше метод построения частного решения неоднородной системы с постоянными коэффициентами на случай, когда правая часть $f(x)$ является суммой нескольких разных квазимногочленов.

Утверждение 2 . Пусть дан оператор $LY = Y' - AY$, где $A-$ квадратная матрица порядка n, и пусть задано уравнение $LY = f$, где $f = f_1 + f_2 + ... + f_k$. Тогда если Y_i- решение уравнения $LY_i = f_i$, $i = 1, 2, ..., k$, то $Y = Y_1 + Y_2 + ... + Y_k$ есть решение уравнения $LY = f = f_1 + f_2 + ... + f_k$.

Пример 1. Найти общее решение неоднородной системы

$$\begin{cases} y_1' = y_2 - 5\cos x, \\ y_2' = 2y_1 + y_2. \end{cases} \tag{17}$$

Решение. Найдем общее решение соответствующей однородной системы:

$$\begin{cases} y_1' = y_2, \\ y_2' = 2y_1 + y_2. \end{cases} \tag{18}$$

Характеристическое уравнение данной системы

$$det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda - 2 = 0$$

имеет корни $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 2$. Найдем собственные векторы отвечающие собственным значениям λ_1 и λ_2 соответственно. Координаты векторов h_1 и h_2 находятся, соответственно, из систем:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_{11} \\ h_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_{12} \\ h_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что в качестве h_1 и h_2 можно взять векторы

$$h_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}; \quad h_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Тогда общее решение однородной системы (18) имеет вид

$$y_{oo} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}_{oo} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-x} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{2x}.$$

Частное решение неоднородной системы (17) будем искать методом неопределенных коэффициентов. Правая часть $f(x)$ системы (17) имеет вид

$$f(x) = \begin{pmatrix} -5\cos x \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \end{pmatrix} \cos x,$$

т.е. является квазиполиномом (n=0, α=0, $\beta = 1$), $\lambda_0 = \alpha + i\beta = i$ не является корнем характеристического уравнения, следовательно, $r = 0$. Тогда согласно утверждению 1 частное решение системы (17) следует искать в виде

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \cos x + \begin{pmatrix} M \\ N \end{pmatrix} \sin x.$$

Подставив это выражение в (17) и приравняв коэффициенты в полученных равенствах при cosx и sinx, получим для определения коэффициентов систему

$$\begin{cases} -A = N; \\ M = B - 5; \\ -B = 2M + N; \\ N = 2A + B. \end{cases}$$

Отсюда следует, что $A = 1$, $B = 3$, $M = 2$, $N = 1$. Следовательно,

$$y = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} \cos x + \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \sin x.$$

Тогда общее решение системы (17) имеет вид

$$y_o = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-x} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{2x} + \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} \cos x + \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \sin x.$$

Пример 2. Найти общее решение неоднородной системы

$$\begin{cases} y_1' = y_1 - y_2 + 1; \\ y_2' = y_1 + 3y_2 + x + e^{2x}. \end{cases} \tag{19}$$

Решение. Общее решение соответствующей однородной системы имеет вид

$$y_{oo} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}_{oo} = C_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2x} + C_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 + x \end{pmatrix} e^{2x}.$$

Чтобы найти общее решение системы (19), достаточно в силу теоремы 1 найти какое-нибудь частное решение системы (19). Будем искать частное решение неоднородной системы (19) методом неопределенных коэффициентов (методом Лагранжа). Поскольку в правой части системы (19) есть слагаемые вида (15) с показателем $\lambda_0 = 0 \neq 2$ и слагаемые вида (15) с показателем $\lambda_0 = 2$, то частное решение неоднородной системы будет состоять из двух частей:

$$y = y^1 + y^2,$$

где y^1 частное решение системы

$$\begin{cases} y_1' = y_1 - y_2 + 1; \\ y_2' = y_1 + 3y_2 + x, \end{cases} \tag{20}$$

а y^2 частное решение системы

$$\begin{cases} y_1' = y_1 - y_2; \\ y_2' = y_1 + 3y_2 + e^{2x}, \end{cases} \tag{21}$$

y^1 и y^2 ищем, соответственно, в виде

$$y^1 = \gamma_0 + \gamma_1 x = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix} x;$$

$$y^2 = (\gamma_0 + \gamma_1 x + \gamma_2 x^2)e^{2x} = \left(\begin{pmatrix} K \\ L \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} M \\ N \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} F \\ H \end{pmatrix} x^2 \right) e^{2x}.$$

Подставив эти выражения y^1 и y^2 соответственно, в (34) и (21) и приравняв коэффициенты в полученных равенствах при x_0, x, x^2, получим: $A = -1$, $B = \dfrac{1}{4}$, $C = -\dfrac{1}{4}$, $D = -\dfrac{1}{4}$, $K = -1$, $L = 0$, $M = 1$, $N = 0$, $F = -\dfrac{1}{2}$, $H = \dfrac{1}{2}$. Следовательно, общее решение системы (33) имеет вид

$$y = C_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2x} + C_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 + x \end{pmatrix} e^{2x} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1/4 \end{pmatrix} - \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} x + \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} x + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} x^2 \right)$$

РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ НЕОДНОРОДНЫХ УРАВНЕНИЙ МЕТОДОМ ВАРИАЦИИ.

Решение неоднородной системы :

$$Y' = A(x)Y + f(x), \tag{22}$$

Можно искать в следующем виде:

$$Y(x) = C_1Y_1 + C_2Y_2 + ... + C_nY_n \tag{23}$$

$Y_1, Y_2, ..., Y_n$ является фундаментальной системой решений однородной системы уравнений

Подставим выражение в исходное уравнение, предполагая при этом, что $C_1C_2, ..., C_n$ являются неизвестными функциями от x. Получим матричное равенство.

$$\sum_{i=1}^{n}(C_i'Y_i + C_iY_i') = \sum_{i=1}^{n} C_iAY_i + f(x) \tag{24}$$

Так как

$$\sum_{i=1}^{n} C_iY_i' = \sum_{i=1}^{n} C_iAY_i \tag{25}$$

то последнее равенство можно записать в следующем виде.

$$\sum_{i=1}^{n} C_i'Y_i = f(x) \tag{26}$$

Пример 3. Найти общее решение неоднородной системы

$$\begin{cases} y_1' = -y_1 + 2y_2; \\ y_2' = -3y_1 + 4y_2 + \frac{e^{3x}}{e^{2x}+1}. \end{cases} \tag{27}$$

Эта система в матричной форме будет в следующем виде:

$$Y' = A(x)Y + f(x) \tag{28}$$

$$A(x) = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}, f(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{e^{3x}}{e^{2x}+1} \end{pmatrix}. \tag{29}$$

Решаем однородную систему,

$$\begin{cases} y_1' = -y_1 + 2y_2; \\ y_2' = -3y_1 + 4y_2. \end{cases} \tag{30}$$

Для этого находим собственные значения матрицы $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 1$. И собственные векторы

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} . \xi_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} . \tag{31}$$

Теперь напишем общее решение однородной системы.

$$Y = C_1 e^{2x} \xi_1 + C_2 e^x \xi_2. \tag{32}$$

Считая C_1, C_2 функциями от x получим следующую систему для определения функций C_1, C_2

$$\begin{cases} 2C_1' e^{2x} + C_2' e^x = 0; \\ 3C_1' e^{2x} + C_2' e^x = \frac{e^{3x}}{e^{2x}+1}. \end{cases} \tag{33}$$

Решая эту систему находим, что

$$\begin{cases} C_1(x) = arctg(e^x) + \widetilde{C_1}; \\ C_2(x) = -ln(e^{2x} + 1) + \widetilde{C_2}. \end{cases} \tag{34}$$

Рекомендуемая литература

1. Бухарова Т.И. и др. Курс лекций по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: НИЯУ МИФИ, 2011.

2. Филиппов А.Ф. Введение в теорию дифференциальных уравнений. М., 2004.

3. Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. М., 2004.

4. Е.Б. Сандаков, Ю.Н. Гордеев. Методы решения линейных дифференциальных уравнений и систем с постоянными коэффициентами. Рекомендовано к изданию УМО кЯдерные физика и технологииь Москва 2013