

Лекция №13

§ 12. Непрерывность элементарных функций

1. Многочлены и рациональные функции. Рассмотрим многочлен степени n , т. е. функцию вида

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0, \quad a_n \neq 0.$$

Эта функция непрерывна на R .

○ Действительно, функция $y = C$, где C — постоянная, непрерывна на R , так как $\Delta y = 0$ при любом x . Функция $y = x$ непрерывна на R , так как $\Delta y = \Delta x \rightarrow 0$ при $\Delta x \rightarrow 0$. Поэтому функция $y = a_k x^k$, где $k \in N$, непрерывна на R как произведение непрерывных функций. Так как многочлен $P_n(x)$ есть сумма непрерывных функций вида $a_k x^k$ ($k = \overline{0, n}$), то он непрерывен на R . ●

Рациональная функция, т. е. функция вида $f(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$, где P_n, Q_m — многочлены степени n и m соответственно, непрерывна во всех точках, которые не являются нулями многочлена $Q_m(x)$.

○ В самом деле, если $Q_m(x_0) \neq 0$, то из непрерывности многочленов P_n и Q_m следует непрерывность функции f в точке x_0 . ●

2. Тригонометрические и обратные тригонометрические функции.

а) *Неравенства для тригонометрических функций.*

Утверждение 1. Если $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ и $x \neq 0$, то

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1. \quad (1)$$

○ Рассмотрим в координатной плоскости круг единичного радиуса с центром в точке O (рис. 12.1). Пусть $\angle AOB = x$, где $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Пусть C — проекция точки B на ось Ox , D — точка пересечения луча OB и прямой, проведенной через точку A перпендикулярно оси Ox . Тогда

$$BC = \sin x, \quad DA = \tan x.$$

Пусть S_1, S_2, S_3 — площади треугольника AOB , сектора AOB и треугольника AOD соответственно. Тогда $S_1 = \frac{1}{2} (OA)^2 \sin x = \frac{1}{2} \sin x$, $S_2 = \frac{1}{2} (OA)^2 x = \frac{1}{2} x$, $S_3 = \frac{1}{2} OA \cdot DA = \frac{1}{2} \tan x$. Так как $S_1 < S_2 < S_3$, то

$$\frac{1}{2} \sin x < \frac{1}{2} x < \frac{1}{2} \tan x. \quad (2)$$

Если $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, то $\sin x > 0$, и поэтому неравенство (2) равносильно неравенству

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x},$$

откуда следует, что при $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ выполняется неравенство (1). Так

как $\frac{x}{\sin x}$ и $\cos x$ — четные функции, то неравенство (1) справедливо

и при $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$. ●

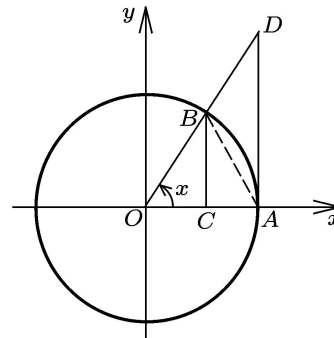


Рис. 12.1

Замечание 1. Из неравенства (2) следует, что

$$\operatorname{tg} x > x \quad \text{при} \quad x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right). \quad (3)$$

Утверждение 2. Для всех $x \in R$ справедливо неравенство

$$|\sin x| \leq |x|. \quad (4)$$

○ Неравенство (4) выполняется при $x = 0$. Пусть $x \neq 0$. Тогда если $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, то из (1) следует неравенство $\frac{\sin x}{x} < 1$, равносильное неравенству (4). Так как $\frac{\sin x}{x}$ — четная функция, то неравенство (4) справедливо и при $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$. Итак, неравенство (4) выполняется,

если $|x| < \frac{\pi}{2}$. Пусть $|x| \geq \frac{\pi}{2}$; тогда неравенство (4) справедливо, так как $|\sin x| \leq 1$, а $\frac{\pi}{2} > 1$. ●

Упражнение 1. Доказать, что для всех $x \in R$ справедливо неравенство

$$0 \leq 1 - \cos x \leq \frac{x^2}{2}.$$

б) *Непрерывность тригонометрических функций.*

Утверждение 3. Функции $y = \sin x$ и $y = \cos x$ непрерывны на R .

○ Пусть x_0 — произвольная точка множества R . Тогда $\sin x - \sin x_0 = 2 \sin \frac{x - x_0}{2} \cos \frac{x + x_0}{2}$. Так как $\left| \sin \frac{x - x_0}{2} \right| \leq \left| \frac{x - x_0}{2} \right|$ в силу неравенства (4), а $\left| \cos \frac{x + x_0}{2} \right| \leq 1$, то $|\sin x - \sin x_0| \leq |x - x_0|$, откуда следует, что функция $y = \sin x$ непрерывна в точке x_0 .

Аналогично имеем $\cos x - \cos x_0 = 2 \sin \frac{x + x_0}{2} \sin \frac{x_0 - x}{2}$, откуда $|\cos x - \cos x_0| < |x - x_0|$, и поэтому функция $\cos x$ непрерывна в точке x_0 . ●

Из непрерывности синуса и косинуса следует, что функция $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$ непрерывна, если $\cos x \neq 0$, т. е. $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$ ($n \in Z$), а функция $\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$ непрерывна, если $x \neq \pi n$ ($n \in Z$).

в) *Первый замечательный предел.*

Утверждение 4. Если $x \rightarrow 0$, то $\frac{\sin x}{x} \rightarrow 1$, т. е.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1. \quad (5)$$

○ Воспользуемся неравенством (1). В силу непрерывности косинуса $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = \cos 0 = 1$. Переходя в соотношении (1) к пределу при $x \rightarrow 0$, получаем равенство (5). ●

г) *Обратные тригонометрические функции.* Рассмотрим функцию

$$y = \sin x, \quad x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] = \Delta. \quad (6)$$

Эта функция, график которой изображен на рис. 12.2, непрерывна и строго возрастает на отрезке Δ (§ 9, пример 9), множество ее значений — отрезок $[-1, 1]$. По теореме об обратной функции на отрезке $[-1, 1]$ определена функция, обратная к функции (6), непрерывная и строго возрастающая. Ее обозначают

$$y = \arcsin x, \quad x \in [-1, 1].$$

Подчеркнем, что функция $\arcsin x$ не является обратной к периодической функции $\sin x$, которая необратима; $\arcsin x$ — функция, обратная по отношению к функции $\sin x$, заданной на отрезке $\Delta = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, т. е. обратная к сужению $\sin x$ на отрезок Δ . График

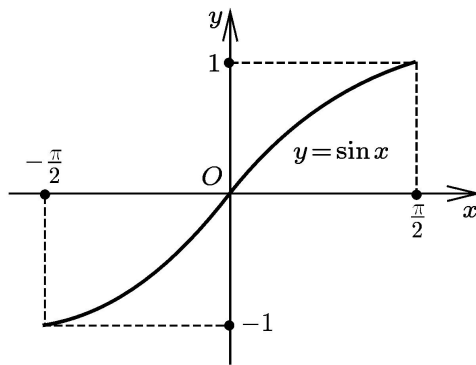


Рис. 12.2

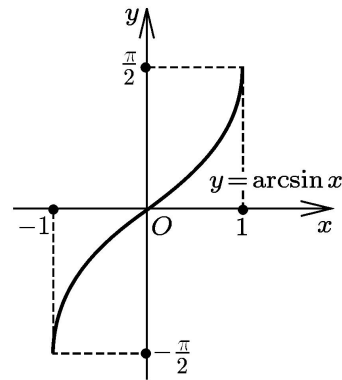


Рис. 12.3

функции $y = \arcsin x$, изображенный на рис. 12.3, симметричен графику функции (6) относительно прямой $y = x$. В силу свойств взаимно обратных функций (§ 9, п. 9)

$$\begin{aligned} \sin(\arcsin x) &= x, \quad x \in [-1, 1], \\ \arcsin(\sin x) &= x, \quad x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \end{aligned} \quad (7)$$

$$\arcsin(-x) = -\arcsin x, \quad x \in [-1, 1], \quad (8)$$

т. е. $\arcsin x$ — нечетная функция.

Пример 1. Построить график функции $y = \arcsin(\sin x)$.

Δ Функция определена на $\mathbb{R}$ и является периодической с периодом 2π . Поэтому достаточно построить ее график на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$.

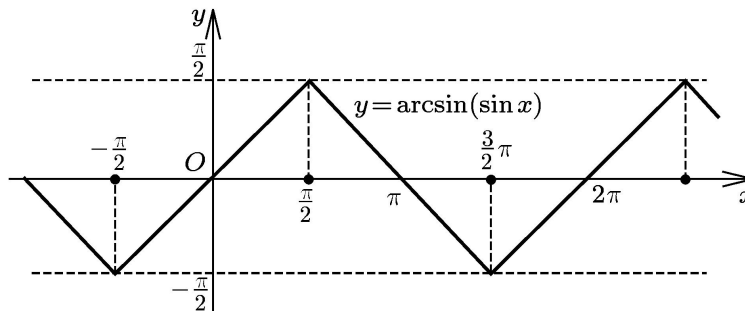


Рис. 12.4

Если $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, то $y = x$ в силу равенства (7). Если $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$, то $-\frac{\pi}{2} \leq x - \pi \leq \frac{\pi}{2}$, и согласно формуле (7) получаем $\arcsin(\sin(x - \pi)) = x - \pi$. С другой стороны, $\sin(x - \pi) = -\sin x$, и поэтому

$$\arcsin(\sin(x - \pi)) = \arcsin(-\sin x) = -\arcsin(\sin x)$$

в силу равенства (8). Таким образом, $x - \pi = -\arcsin(\sin x)$, если $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$. Следовательно,

$$y = \arcsin(\sin x) = \begin{cases} x, & \text{если } -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \\ \pi - x, & \text{если } \frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{2}. \end{cases}$$

График функции $y = \arcsin(\sin x)$ изображен на рис. 12.4. ▲

Функция

$$y = \cos x, \quad 0 \leq x \leq \pi,$$

непрерывна и строго убывает. Обратная к ней функция, которую обозначают

$$y = \arccos x, \quad x \in [-1, 1],$$

непрерывна и строго убывает. График этой функции изображен на рис. 12.5. По свойствам взаимно обратных функций

$$\cos(\arccos x) = x, \quad x \in [-1, 1],$$

$$\arccos(\cos x) = x, \quad x \in [0, \pi].$$

Пример 2. Доказать, что для всех $x \in [-1, 1]$ справедливы равенства

$$\arccos(-x) = \pi - \arccos x, \quad (9)$$

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}. \quad (10)$$

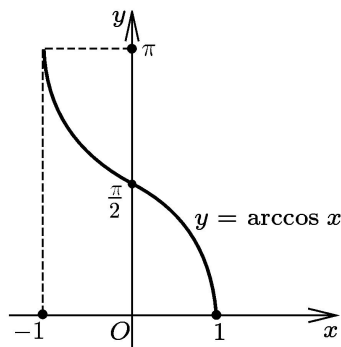


Рис. 12.5

△ а) Обозначим $\arccos x = \alpha$. Тогда согласно определению $\arccos x$

$$0 \leq \alpha \leq \pi, \quad \cos \alpha = x.$$

Из этих соотношений следует, что $0 \leq \pi - \alpha \leq \pi$ и $\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha = -x$, откуда по определению $\arccos x$ находим $\pi - \alpha = \arccos(-x)$. Формула (9) доказана.

б) Обозначим $\alpha = \arcsin x$. Тогда $-\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ и $\sin \alpha = x$, откуда $0 \leq \frac{\pi}{2} - \alpha \leq \pi$ и $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha = x$. Отсюда согласно определению арккосинуса следует, что $\frac{\pi}{2} - \alpha = \arccos x$. Равенство (10) доказано. ▲

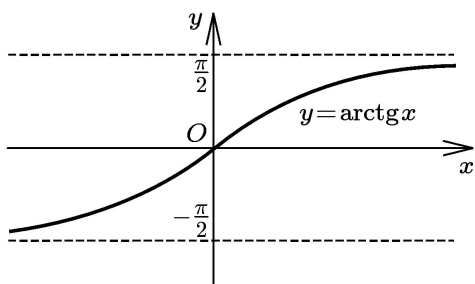


Рис. 12.6

Упражнение 2. Построить график функции:

- а) $y = \arccos(\cos x)$;
- б) $y = \arcsin(\cos x)$.

Функция

$$y = \operatorname{tg} x, \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2},$$

непрерывна и строго возрастает. Обратная к ней функция, которую обозначают

$$y = \operatorname{arctg} x, \quad x \in R,$$

непрерывна и строго возрастает. График этой функции изображен на рис. 12.6.

Отметим, что в силу свойств взаимно обратных функций имеем

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x, \quad x \in R,$$

$$\begin{aligned} \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) &= x, \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \\ \operatorname{arctg}(-x) &= -\operatorname{arctg} x, \quad x \in R. \end{aligned}$$

Функцию, обратную к функции

$$y = \operatorname{ctg} x, \quad 0 < x < \pi,$$

обозначают $y = \operatorname{arcctg} x$. Эта функция определена на R , непрерывна и строго убывает. Ее график изображен на рис. 12.7.

Упражнение 3. Доказать, что для всех $x \in R$ справедливо равенство

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2}.$$

3. Степенная функция с рациональным показателем. Степенная функция с натуральным показателем, т. е.

$$y = x^n, \quad x \in R,$$

где $n \in N$, непрерывна на R . Если $n = 2k + 1$, то эта функция строго возрастает на R (§ 9, пример 9) и поэтому обратима. На рис. 12.8

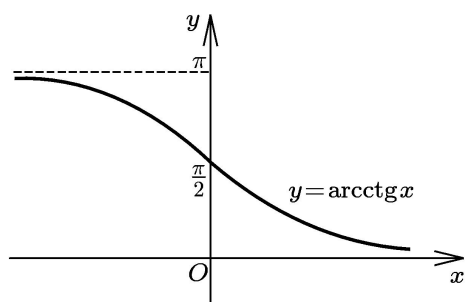


Рис. 12.7

изображены графики функций $y = x^3$ и $y = \sqrt[3]{x} = x^{1/3}$.

Степенная функция с четным натуральным показателем, т. е. функция $y = x^{2k}$, $k \in N$, $x \in R$,

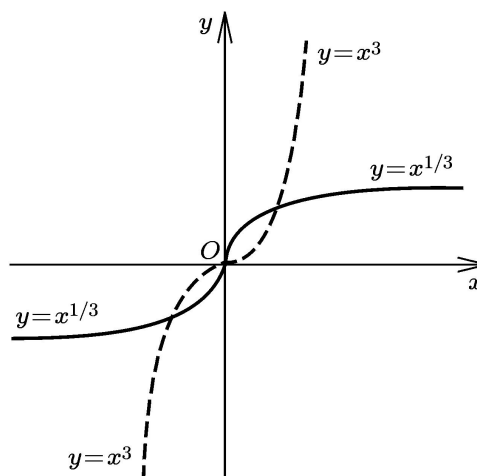


Рис. 12.8

необратима. Однако ее сужение на множество $[0, +\infty)$, т. е. функция $y = x^{2k}$, $k \in \mathbb{N}$, $x \in [0, +\infty)$, обратима и обратной к ней является функция $y = \sqrt[2k]{x}$. На рис. 9.10 изображены графики взаимно обратных функций $y = x^2$, $x \in [0, +\infty)$, и $y = \sqrt{x}$.

Очевидно, функция $y = x^{2k}$, $k \in \mathbb{N}$, $x \in (-\infty, 0)$, т. е. сужение функции x^{2k} на множество $(-\infty, 0)$, также обратима, и обратной для нее является функция $y = -\sqrt[2k]{x}$. На рис. 9.11 изображены графики функций $y = x^2$, $x \leq 0$, и $y = -\sqrt{x}$.

Если $x > 0$, то при любом $n \in \mathbb{N}$ функция x^n обратима, а обратная к ней функция обозначается $x^{1/n}$ или $\sqrt[n]{x}$. Функция $y = x^{-n}$, $n \in \mathbb{N}$,

определена и непрерывна при $x \neq 0$ и записывается в виде $y = 1/x^n$. При $n = 2k + 1$ ($k \in \mathbb{N}$) эта функция обратима на множестве $E = \{x: x \in \mathbb{R}, x \neq 0\}$, а при $n = 2k$ ($k \in \mathbb{N}$) обратима на множествах $(-\infty, 0)$ и $(0, +\infty)$.

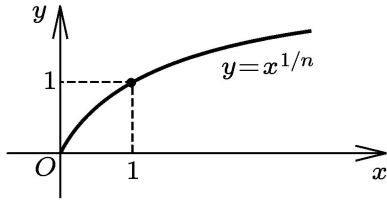


Рис. 12.9

Дадим определение степенной функции x^r с рациональным показателем r . Если $r = m/n$, $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, то положим

$$x^r = (x^{1/n})^m, \quad x > 0. \quad (11)$$

Функция $x^{1/n}$ непрерывна и строго возрастает (рис. 12.9).

Функция t^m непрерывна при $t > 0$, строго возрастает, если $m > 0$, и строго убывает, если $m < 0$. Поэтому функция x^r непрерывна при $x > 0$, строго возрастает, если $r > 0$, и строго убывает, если $r < 0$.

Перечислим некоторые свойства рациональных степеней вещественных чисел:

$$(a^{1/n})^m = (a^m)^{1/n}, \quad a > 0, \quad (12)$$

$$a^r > 1 \quad \text{при} \quad r \in \mathbb{Q}, \quad a > 1, \quad r > 0, \quad (13)$$

$$a^{r_1} a^{r_2} = a^{r_1 + r_2} \quad \text{при} \quad a > 0, \quad r_1 \in \mathbb{Q}, \quad r_2 \in \mathbb{Q}, \quad (14)$$

$$(a^{r_1})^{r_2} = a^{r_1 r_2} \quad \text{при} \quad a > 0, \quad r_1 \in \mathbb{Q}, \quad r_2 \in \mathbb{Q}, \quad (15)$$

$$a^{r_1} > a^{r_2} \quad \text{при} \quad a > 1, \quad r_1 \in \mathbb{Q}, \quad r_2 \in \mathbb{Q}, \quad r_1 > r_2. \quad (16)$$

Свойства (12)–(16) легко проверяются, если воспользоваться свойствами целых степеней и тем, что при $a > 0$, $b > 0$ из $a^n = b^n$, $n \in \mathbb{N}$, следует $a = b$. Проверим, например, равенство (12).

Так как

$$((a^m)^{1/n})^n = a^m, \quad ((a^{1/n})^m)^n = ((a^{1/n})^n)^m = a^m, \quad (17)$$

то из равенств (17) следует равенство (12).