

Лекция №12

§ 11. Непрерывность функции

1. Понятие непрерывности функции.

Определение. Функция $f(x)$, определенная в некоторой окрестности точки a , называется *непрерывной в точке a* , если

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a). \quad (1)$$

Таким образом, функция f непрерывна в точке a , если выполнены следующие условия:

а) функция f определена в некоторой окрестности точки a , т. е. существует число $\delta_0 > 0$ такое, что $U_{\delta_0}(a) \subset D(f)$;

б) существует $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$;

в) $A = f(a)$.

Определение непрерывности функции $f(x)$ в точке a , выраженное условием (1), можно сформулировать с помощью неравенств (на языке ε – δ), с помощью окрестностей и в терминах последовательностей соответственно в виде

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0: \forall x: |x - a| < \delta \rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon, \\ \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0: \forall x \in U_\delta(a) \rightarrow f(x) \in U_\varepsilon(f(a)), \\ \forall \{x_n\}: \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(a). \end{aligned}$$

Подчеркнем, что в определении непрерывности, в отличие от определения предела, рассматривается полная, а не проколота окрестность точки a , и пределом функции является значение этой функции в точке a .

Назовем разность $x - a$ *приращением аргумента* и обозначим Δx , а разность $f(x) - f(a)$ — *приращением функции*, соответствующим данному приращению аргумента Δx , и обозначим Δy . Таким образом,

$$\Delta x = x - a, \quad \Delta y = f(x) - f(a) = f(a + \Delta x) - f(a).$$

При этих обозначениях равенство (1) примет вид

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0.$$

Таким образом, непрерывность функции в точке означает, что бесконечно малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение функции.

Пример 1. Доказать, что функция $f(x)$ непрерывна в точке a , если:

а) $f(x) = x^3$, $a = 1$; б) $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $a \neq 0$; в) $f(x) = \sqrt{x}$, $a > 0$;

г) $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases} \quad a = 0.$

△ а) Если $x \rightarrow 1$, то по свойствам пределов (§ 10, (11)) получаем $x^3 \rightarrow 1$, т. е. для функции $f(x) = x^3$ в точке $x = 1$ выполняется условие (1). Поэтому функция x^3 непрерывна в точке $x = 1$.

б) Если $x \rightarrow a$, где $a \neq 0$, то, используя свойства пределов (§ 10), получаем $\frac{1}{x} \rightarrow \frac{1}{a}$, $\frac{1}{x^2} \rightarrow \frac{1}{a^2}$, т. е. функция $\frac{1}{x^2}$ непрерывна в точке $x = a$ ($a \neq 0$).

в) Так как $|\sqrt{x} - \sqrt{a}| = \frac{|x - a|}{\sqrt{x} + \sqrt{a}}$, то отсюда получаем $0 \leq |\sqrt{x} - \sqrt{a}| < \frac{|x - a|}{\sqrt{a}}$. Следовательно, $\sqrt{x} - \sqrt{a} \rightarrow 0$ при $x \rightarrow a$. Это означает, что функция $\sqrt{x}$ непрерывна в точке a , где $a > 0$.

г) Функция f определена на R , и при любом $x \in R$ выполняется неравенство $0 \leq |f(x) - f(0)| = |f(x)| \leq |x|$, так как $\left| \sin \frac{1}{x} \right| \leq 1$ при $x \neq 0$. Следовательно, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = 0$, т. е. функция f непрерывна в точке $x = 0$. ▲

По аналогии с понятием предела слева (справа) вводится понятие непрерывности слева (справа). Если функция f определена на полуинтервале $(a - \delta, a]$ и $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = f(a)$, т. е. $f(a - 0) = f(a)$, то эту функцию называют *непрерывной слева в точке a* .

Аналогично, если функция f определена на полуинтервале $[a, a + \delta)$ и $f(a + 0) = f(a)$, то эту функцию называют *непрерывной справа в точке a* .

Например, функция $f(x) = [x]$ непрерывна справа в точке $x = 1$ и не является непрерывной слева в этой точке (§ 9, пример 1), так как $f(1 - 0) = 0$, $f(1 + 0) = f(1) = 1$.

Очевидно, функция непрерывна в данной точке тогда и только тогда, когда она непрерывна как справа, так и слева в этой точке.

2. Точки разрыва. В п. 2 будем предполагать, что функция f определена в некоторой проколотой окрестности точки a .

Точку a назовем *точкой разрыва функции f* , если эта функция либо не определена в точке a , либо определена, но не является непрерывной в точке a .

Следовательно, a — точка разрыва функции f , если не выполняется по крайней мере одно из следующих условий:

а) $a \in D(f)$;

б) существует конечный $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$;

в) $A = f(a)$.

Если a — точка разрыва функции f , причем в этой точке существуют конечные пределы слева и справа, т. е. $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = f(a-0)$ и $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = f(a+0)$, то точку a называют *точкой разрыва первого рода*.

З а м е ч а н и е 1. Если $x = a$ — точка разрыва первого рода функции $f(x)$, то разность $f(a+0) - f(a-0)$ называют *скачком функции в точке a* . В случае когда $f(a+0) = f(a-0)$, точку a называют *точкой устранимого разрыва*. Полагая $f(a) = f(a+0) = f(a-0) = A$, получим функцию

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если } x \neq a, \\ A, & \text{если } x = a, \end{cases}$$

непрерывную в точке a и совпадающую с $f(x)$ при $x \neq a$. В этом случае говорят, что функция *доопределена по непрерывности в точке a* .

Пусть $x = a$ — точка разрыва функции f , не являющаяся точкой разрыва первого рода. Тогда ее называют *точкой разрыва второго рода функции f* . В такой точке хотя бы один из односторонних пределов либо не существует, либо бесконечен.

Например, для функции $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$ точка $x = 0$ — точка разрыва первого рода. Доопределив эту функцию по непрерывности, получим функцию

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0, \end{cases}$$

непрерывную в точке $x = 0$, так как

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0.$$

Для функций $\sin \frac{1}{x}$ и $\frac{1}{x^2}$ точка $x = 0$ — точка разрыва второго рода (см. рис. 10.3 и 10.8).

Теорема 1. Если функция f определена на отрезке $[a, b]$ и монотонна, то она может иметь внутри этого отрезка точки разрыва только первого рода.

○ Пусть x_0 — произвольная точка интервала (a, b) . По теореме 2, § 10 функция f имеет в точке x_0 конечные пределы слева и справа. Если, например, f — возрастающая функция, то

$$f(x_0 - 0) \leq f(x_0) \leq f(x_0 + 0),$$

где $f(x_0 - 0)$ и $f(x_0 + 0)$ — соответственно пределы функции f слева и справа в точке x_0 .

В том случае, когда $f(x_0 - 0) \neq f(x_0 + 0)$, точка x_0 является точкой разрыва первого рода функции f ; если же $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0)$, то точка x_0 есть точка непрерывности функции f . Аналогичное утверждение справедливо и для убывающей функции. ●

3. Свойства функций, непрерывных в точке.

а) *Локальные свойства непрерывной функции.*

Свойство 1. Если функция f непрерывна в точке a , то она ограничена в некоторой окрестности этой точки, т. е.

$$\exists \delta > 0 \quad \exists C > 0: \forall x \in U_\delta(a) \rightarrow |f(x)| \leq C.$$

Свойство 2. Если функция f непрерывна в точке a , причем $f(a) \neq 0$, то в некоторой окрестности точки a знак функции совпадает со знаком числа $f(a)$, т. е.

$$\exists \delta > 0: \forall x \in U_\delta(a) \rightarrow \operatorname{sign} f(x) = \operatorname{sign} f(a).$$

○ Эти утверждения следуют из свойств пределов (§ 10, п. 4). ●

б) *Непрерывность суммы, произведения и частного.*

Если функции f и g непрерывны в точке a , то функции $f + g$, fg и f/g (при условии $g(a) \neq 0$) непрерывны в точке a .

○ Это утверждение следует из определения непрерывности и свойств пределов (§ 10, п. 4). ●

в) *Непрерывность сложной функции.* Понятие сложной функции было введено в § 9 (п. 2).

Теорема 2. Если функция $z = f(y)$ непрерывна в точке y_0 , а функция $y = \varphi(x)$ непрерывна в точке x_0 , причем $y_0 = \varphi(x_0)$, то в некоторой окрестности точки x_0 определена сложная функция $f(\varphi(x))$, и эта функция непрерывна в точке x_0 .

○ Пусть задано произвольное число $\varepsilon > 0$. В силу непрерывности функции f в точке y_0 существует число $\rho = \rho(\varepsilon) > 0$ такое, что $U_\rho(y_0) \subset D(f)$ и

$$\forall y \in U_\rho(y_0) \rightarrow f(y) \in U_\varepsilon(z_0), \quad (2)$$

где $z_0 = f(y_0)$.

В силу непрерывности функции φ в точке x_0 для найденного в (2) числа $\rho > 0$ можно указать число $\delta = \delta_\rho = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что

$$\forall x \in U_\delta(x_0) \rightarrow \varphi(x) \in U_\rho(y_0). \quad (2')$$

Из условий (2) и (2') следует, что на множестве $U_\delta(x_0)$ определена сложная функция $f(\varphi(x))$, причем

$$\forall x \in U_\delta(x_0) \rightarrow f(y) = f(\varphi(x)) \in U_\varepsilon(z_0),$$

где $z_0 = f(\varphi(x_0)) = f(y_0)$, т. е.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0: \forall x \in U_\delta(x_0) \rightarrow f(\varphi(x)) \in U_\varepsilon(\varphi(x_0)).$$

Это означает, в силу определения непрерывности, что функция $f(\varphi(x))$ непрерывна в точке x_0 . ●

Замечание 2. Соответствие между окрестностями точек x_0 , y_0 , z_0

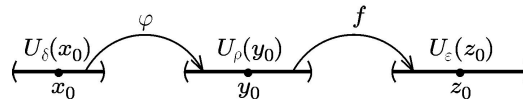


Рис. 11.1

представлено на рис. 11.1. По заданному числу $\varepsilon > 0$ сначала находим $\rho > 0$, а затем для чисел $\rho > 0$ находим $\delta > 0$.

Упражнение 1. Сформулировать определение непрерывности с помощью последовательностей (по Гейне) и доказать, исходя из этого определения, теорему 2.

4. Свойства функций, непрерывных на отрезке. Функцию $f(x)$ называют *непрерывной на отрезке* $[a, b]$, если она непрерывна в каждой точке интервала (a, b) и, кроме того, непрерывна справа в точке a и непрерывна слева в точке b .

а) *Ограниченность непрерывной на отрезке функции.*

Теорема 3 (Вейерштрасса). *Если функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она ограничена, т. е.*

$$\exists C > 0: \forall x \in [a, b] \rightarrow |f(x)| \leq C. \quad (3)$$

○ Предположим противное, тогда

$$\forall C > 0 \quad \exists x_C \in [a, b]: |f(x_C)| > C. \quad (4)$$

Полагая в (4) $C = 1, 2, \dots, n, \dots$, получим, что

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists x_n \in [a, b]: |f(x_n)| > n. \quad (5)$$

Последовательность $\{x_n\}$ ограничена, так как $a \leq x_n \leq b$ для всех $n \in \mathbb{N}$. По теореме Больцано–Вейерштрасса из нее можно выделить сходящуюся подпоследовательность, т. е. существуют подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$ и точка ξ такие, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = \xi, \quad (6)$$

где в силу условия (5) для любого $k \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство

$$a \leq x_{n_k} \leq b. \quad (7)$$

Из условий (6) и (7) следует (см. § 4, п. 5, замечание 5), что $\xi \in [a, b]$, а из условия (6) в силу непрерывности функции f в точке ξ получаем

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = f(\xi). \quad (8)$$

С другой стороны, утверждение (5) выполняется при всех $n \in \mathbb{N}$ и, в частности, при $n = n_k$ ($k = 1, 2, \dots$), т. е.

$$|f(x_{n_k})| > n_k,$$

откуда следует, что $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = \infty$, так как $n_k \rightarrow +\infty$ при $k \rightarrow \infty$.

Это противоречит равенству (8), согласно которому последовательность $\{f(x_{n_k})\}$ имеет конечный предел. Поэтому условие (4) не может выполняться, т. е. справедливо утверждение (3). ●

Замечание 3. Теорема 3 неверна для промежутков, не являющихся отрезками. Например, функция $f(x) = \frac{1}{x}$ непрерывна на интервале $(0, 1)$, но не ограничена на этом интервале. Функция $f(x) = x^2$ непрерывна на R , но не ограничена на R .

б) *Достижимость точных граней.*

Теорема 4 (Вейерштрасса). Если функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она достигает своей точной верхней и нижней грани, т. е.

$$\exists \xi \in [a, b]: f(\xi) = \sup_{x \in [a, b]} f(x), \quad (9)$$

$$\exists \tilde{\xi} \in [a, b]: f(\tilde{\xi}) = \inf_{x \in [a, b]} f(x). \quad (10)$$

О Так как непрерывная на отрезке функция $f(x)$ ограничена (теорема 3), т. е. множество значений, принимаемых функцией f на отрезке $[a, b]$, ограничено, то существуют $\sup_{x \in [a, b]} f(x)$ и $\inf_{x \in [a, b]} f(x)$ (см. § 2).

Докажем утверждение (9). Обозначим $M = \sup_{x \in [a, b]} f(x)$. В силу определения точной верхней грани выполняются условия

$$\forall x \in [a, b] \rightarrow f(x) \leq M, \quad (11)$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists x(\varepsilon) \in [a, b]: f(x(\varepsilon)) > M - \varepsilon. \quad (12)$$

Полагая $\varepsilon = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$, получим в силу условия (12) последовательность $\{x_n\}$, где $x_n = x\left(\frac{1}{n}\right)$, такую, что для всех $n \in N$ выполняются условия

$$x_n \in [a, b], \quad (13)$$

$$f(x_n) > M - \frac{1}{n}. \quad (14)$$

Из соотношений (11), (13) и (14) следует, что

$$\forall n \in N \rightarrow M - \frac{1}{n} < f(x_n) \leq M,$$

откуда получаем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = M. \quad (15)$$

Как и в теореме 3, из условия (13) следует, что существуют подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$ последовательности $\{x_n\}$ и точка ξ такие, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = \xi, \quad \text{где } \xi \in [a, b].$$

В силу непрерывности функции f в точке ξ

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = f(\xi). \quad (16)$$

С другой стороны, $\{f(x_{n_k})\}$ — подпоследовательность последовательности $\{f(x_n)\}$, сходящейся, согласно условию (15), к числу M . Поэтому

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = M. \quad (17)$$

В силу единственности предела последовательности из (16) и (17) заключаем, что $f(\xi) = M = \sup_{x \in [a, b]} f(x)$. Утверждение (9) доказано.

Аналогично доказывается утверждение (10). ●

Замечание 4. Теорема 4 неверна для интервалов: функция, непрерывная на интервале, может не достигать своих точных граней. Например, функция $f(x) = x^2$ не достигает на интервале $(0, 1)$ своей точной нижней грани, равной нулю, и точной верхней грани, равной единице.

в) *Промежуточные значения.*

Теорема 5 (теорема Коши о нулях непрерывной функции). *Если функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$ и принимает в его концах значения разных знаков, т. е. $f(a)f(b) < 0$, то на отрезке $[a, b]$ имеется хотя бы один нуль функции f , т. е.*

$$\exists c \in [a, b]: f(c) = 0. \quad (18)$$

○ Разделим отрезок $[a, b]$ пополам. Пусть d — середина этого отрезка. Если $f(d) = 0$, то теорема доказана, а если $f(d) \neq 0$, то в концах одного из отрезков $[a, d]$, $[d, b]$ функция f принимает значения разных знаков. Обозначим этот отрезок $\Delta_1 = [a_1, b_1]$. Пусть d_1 — середина отрезка Δ_1 . Возможны два случая: 1) $f(d_1) = 0$, тогда теорема доказана; 2) $f(d_1) \neq 0$, тогда в концах одного из отрезков $[a_1, d_1]$, $[d_1, b_1]$ функция f принимает значения разных знаков; такой отрезок обозначим $\Delta_2 = [a_2, b_2]$.

Продолжая эти рассуждения, получим:

1) либо через конечное число шагов найдется точка $c \in [a, b]$ такая, что $f(c) = 0$; тогда справедливо утверждение (18);

2) либо существует последовательность отрезков $\{\Delta_n\}$ такая, что $f(a_n)f(b_n) < 0$ для всех $n \in \mathbb{N}$, где $\Delta_n = [a_n, b_n]$; эта последовательность отрезков является стягивающейся (§ 6, п. 4), так как $\Delta_n \subset \Delta_{n-1}$ для любого $n \in \mathbb{N}$ и

$$b_n - a_n = \frac{b - a}{2^n}. \quad (19)$$

По теореме Кантора (§ 6) существует точка c , принадлежащая всем отрезкам последовательности $\{\Delta_n\}$, т. е.

$$\exists c: \forall n \in \mathbb{N} \rightarrow c \in [a_n, b_n] \subset [a, b]. \quad (20)$$

Докажем, что

$$f(c) = 0. \quad (21)$$

Предположим, что равенство (21) не выполняется. Тогда либо $f(c) > 0$, либо $f(c) < 0$. Пусть, например, $f(c) > 0$. По свойству сохранения непрерывной функцией знака (п. 3, а))

$$\exists \delta > 0: \forall x \in U_\delta(c) \rightarrow f(x) > 0. \quad (22)$$

С другой стороны, из неравенства (19) следует, что $b_n - a_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, и поэтому

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}: b_{n_0} - a_{n_0} < \delta. \quad (23)$$

Так как $c \in \Delta_{n_0}$ в силу условия (20), то из (23) следует, что $\Delta_{n_0} \subset U_\delta(c)$ и согласно условию (22) во всех точках отрезка Δ_{n_0} функция f принимает положительные значения. Это противоречит тому, что в концах каждого из отрезков Δ_n функция f принимает значения разных знаков.

Полученное противоречие доказывает, что должно выполняться условие (21). ●

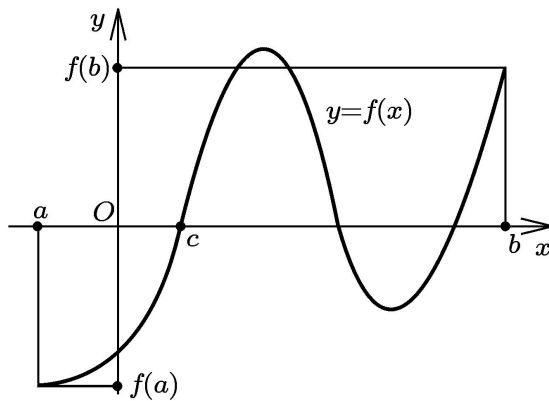


Рис. 11.2

Замечание 5. Теорема 5 утверждает, что график функции $y = f(x)$, непрерывной на отрезке $[a, b]$ и принимающей в его концах значения разных знаков, пересекает ось Ox (рис. 11.2) хотя бы в одной точке отрезка $[a, b]$.

Теорема 6 (теорема Коши о промежуточных значениях). *Если функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$ и $f(a) \neq f(b)$, то для каждого значения C , заключенного между $f(a)$ и $f(b)$,*

найдется точка $\xi \in [a, b]$ такая, что $f(\xi) = C$.

○ Обозначим $f(a) = A$, $f(b) = B$. По условию $A \neq B$. Пусть, например, $A < B$. Нужно доказать, что

$$\forall C \in [A, B] \quad \exists \xi \in [a, b]: f(\xi) = C. \quad (24)$$

Если $C = A$, то утверждение (24) выполняется при $\xi = a$, а если $C = B$, то (24) имеет место при $\xi = b$. Поэтому достаточно рассмотреть случай $A < C < B$.

Пусть $\varphi(x) = f(x) - C$, тогда $\varphi(a) = A - C < 0$, $\varphi(b) = B - C > 0$, и по теореме 5 найдется точка $\xi \in [a, b]$ такая, что $\varphi(\xi) = 0$, т. е. $f(\xi) = C$. Утверждение (24) доказано. ●

Следствие. *Если функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$, $m = \inf_{x \in [a, b]} f(x)$, $M = \sup_{x \in [a, b]} f(x)$, то множество значений, принимаемых функцией f на отрезке $[a, b]$, есть отрезок $[m, M]$.*

○ Для всех $x \in [a, b]$ выполняется неравенство $m \leq f(x) \leq M$, причем согласно теореме 4 функция f принимает на отрезке $[a, b]$ значения, равные m и M . Все значения из отрезка $[m, M]$ функция принимает по теореме 6. Отрезок $[m, M]$ вырождается в точку, если $f(x) = \text{const}$ на отрезке $[a, b]$. ●

г) *Существование и непрерывность функции, обратной для непрерывной и строго монотонной функции.* Понятие обратной функции было введено в § 9 (п. 9). Докажем теорему о существовании и непрерывности обратной функции.

Теорема 7. *Если функция $y = f(x)$ непрерывна и строго возрастает на отрезке $[a, b]$, то на отрезке $[f(a), f(b)]$ определена функция $x = g(y)$, обратная к f , непрерывная и строго возрастающая.*

○ **Существование обратной функции.** Обозначим $A = f(a)$, $B = f(b)$. Так как f — возрастающая функция, то для всех $x \in [a, b]$ выполняется неравенство $A \leq f(x) \leq B$, где $A = \inf_{x \in [a, b]} f(x)$, $B = \sup_{x \in [a, b]} f(x)$, и в силу непрерывности f (следствие из теоремы 6)

множество значений функции $E(f) = [A, B]$.

Согласно определению обратной функции (§ 9, п. 9) нужно доказать, что для каждого $y_0 \in [A, B]$ уравнение

$$f(x) = y_0 \quad (25)$$

имеет единственный корень $x = x_0$, причем $x_0 \in [a, b]$.

Существование хотя бы одного корня уравнения (25) следует из теоремы 6. Докажем, что уравнение (25) имеет на отрезке $[a, b]$ единственный корень.

Предположим, что наряду с корнем $x = x_0$ уравнение (25) имеет еще один корень $x = \tilde{x}_0$, где $\tilde{x}_0 \neq x_0$; тогда $f(\tilde{x}_0) = y_0$, $\tilde{x}_0 \in [a, b]$.

Пусть, например, $\tilde{x}_0 > x_0$. Тогда в силу строгого возрастания функции f на отрезке $[a, b]$ выполняется неравенство $f(\tilde{x}_0) > f(x_0)$. С другой стороны, $f(\tilde{x}_0) = f(x_0) = y_0$. Отсюда следует, что неравенство $\tilde{x}_0 > x_0$ не может выполняться. Следовательно, $\tilde{x}_0 = x_0$. Существование обратной функции доказано, т. е. на отрезке $[A, B]$ определена функция $x = f^{-1}(y) = g(y)$, обратная к f , причем $E(g) = [a, b]$ и

$$g(f(x)) = x, \quad x \in [a, b], \quad f(g(y)) = y, \quad y \in [A, B]. \quad (26)$$

Монотонность обратной функции. Докажем, что $g(y)$ — строго возрастающая на отрезке $[A, B]$ функция, т. е.

$$\forall y_1, y_2 \in [A, B]: y_1 < y_2 \rightarrow g(y_1) < g(y_2). \quad (27)$$

Предположим противное; тогда условие (27) не выполняется, т. е.

$$\exists \tilde{y}_1, \tilde{y}_2 \in [A, B]: \tilde{y}_1 < \tilde{y}_2 \rightarrow g(\tilde{y}_1) \geq g(\tilde{y}_2). \quad (28)$$

Обозначим $\tilde{x}_1 = g(\tilde{y}_1)$, $\tilde{x}_2 = g(\tilde{y}_2)$, тогда $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2 \in [a, b]$, $\tilde{x}_1 \geq \tilde{x}_2$ в силу (28) и $f(\tilde{x}_1) = \tilde{y}_1$, $f(\tilde{x}_2) = \tilde{y}_2$ согласно равенству (26).

Так как f — строго возрастающая функция, то из неравенства $\tilde{x}_1 \geq \tilde{x}_2$ следует неравенство $f(\tilde{x}_1) \geq f(\tilde{x}_2)$, т. е. $\tilde{y}_1 \geq \tilde{y}_2$, что невозможно, так как $\tilde{y}_1 < \tilde{y}_2$ в силу (28). Таким образом, утверждение (28) не может выполняться, и поэтому $g(y)$ — строго возрастающая функция.

Непрерывность обратной функции. Пусть y_0 — произвольная точка интервала (A, B) . Докажем, что функция g непрерывна в точке y_0 . Для этого достаточно показать, что справедливы равенства

$$g(y_0 - 0) = g(y_0), \quad g(y_0 + 0) = g(y_0), \quad (29)$$

где $g(y_0 - 0)$ и $g(y_0 + 0)$ — пределы функции g соответственно слева и справа в точке y_0 .

По теореме о пределах монотонной функции (§ 10) пределы функции g слева и справа в точке y_0 существуют и выполняются неравенства

$$g(y_0 - 0) \leq g(y_0) \leq g(y_0 + 0). \quad (30)$$

Пусть хотя бы одно из равенств (29) не выполняется, например, $g(y_0 - 0) \neq g(y_0)$, тогда

$$g(y_0 - 0) < g(y_0). \quad (31)$$

Так как для всех $y \in [A, y_0)$ выполняется неравенство $a \leq g(y) \leq g(y_0 - 0)$, где $g(y_0 - 0) = \sup_{A \leq y < y_0} g(y)$, а при всех $y \in [y_0, B]$ справедливо неравенство $g(y_0) \leq g(y) \leq b$, то из условия (31) следует, что интервал $\Delta = (g(y_0 - 0), g(y_0))$ не принадлежит множеству значений функции g . Это противоречит тому, что все точки отрезка $[a, b]$, в том числе и точки интервала Δ , принадлежат множеству $E(g)$. Итак, первое из равенств (29) доказано. Аналогично доказывается справедливость второго из равенств (29).

Тем же способом устанавливается, что функция g непрерывна справа в точке A и непрерывна слева в точке B . ●

Замечание 6. Если функция f непрерывна и строго убывает на отрезке $[a, b]$, то обратная к ней функция g непрерывна и строго убывает на отрезке $[f(b), f(a)]$.

Замечание 7. Аналогично формулируется и доказывается теорема о функции g , обратной к функции f , для случаев, когда функция f задана на интервале (конечном либо бесконечном) и полуинтервале.

Если функция f определена, строго возрастает и непрерывна на интервале (a, b) , то обратная функция g определена, строго возрастает и непрерывна на интервале (A, B) , где

$$A = \lim_{x \rightarrow a+0} f(x), \quad B = \lim_{x \rightarrow b-0} f(x).$$