

Лекция №11

4. Свойства пределов функций. В рассматриваемых ниже свойствах речь идет о конечном пределе функции в заданной точке. Под точкой понимается либо число a , либо один из символов $a - 0$, $a + 0$, $-\infty$, $+\infty$, ∞ . Предполагается, что функция определена в некоторой окрестности или полуокрестности точки a , не содержащей саму точку a . Для определенности будем формулировать и доказывать свойства пределов, предполагая, что a — число, а функция определена в проколотой окрестности точки a .

а) *Локальные свойства функции, имеющей предел.* Покажем, что функция, имеющая конечный предел в заданной точке, обладает некоторыми *локальными* свойствами, т. е. свойствами, которые справедливы в окрестности этой точки.

Свойство 1. *Если функция $f(x)$ имеет предел в точке a , то существует такая проколотая окрестность точки a , в которой эта функция ограничена.*

○ Пусть $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$. В силу определения предела по заданному числу $\varepsilon = 1$ можно найти число $\delta > 0$ такое, что для всех $x \in \dot{U}_\delta(a)$ выполняется неравенство $|f(x) - A| < 1$ или $A - 1 < f(x) < A + 1$. Это означает (см. § 9, п. 6), что функция f ограничена на множестве $\dot{U}_\delta(a)$. ●

Свойство 2. *Если $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$, причем $A \neq 0$, то найдется такая проколотая окрестность точки a , в которой значения функции f имеют тот же знак, что и число A .*

○ Согласно определению предела по заданному числу $\varepsilon = \frac{|A|}{2} > 0$ можно найти такое число $\delta > 0$, что для всех $x \in \dot{U}_\delta(a)$ выполняется неравенство $|f(x) - A| < \frac{|A|}{2}$, или

$$A - \frac{|A|}{2} < f(x) < A + \frac{|A|}{2}. \quad (7)$$

Если $A > 0$, то из левого неравенства (7) следует, что

$$f(x) > \frac{A}{2} > 0 \quad \text{для } x \in \dot{U}_\delta(a).$$

Если $A < 0$, то из правого неравенства (7) следует, что

$$f(x) < \frac{A}{2} < 0 \quad \text{для } x \in \dot{U}_\delta(a). \quad \bullet$$

Доказанное свойство называют *свойством сохранения знака предела*.

Свойство 3. Если $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = B$, причем $B \neq 0$, то существует число $\delta > 0$ такое, что функция $\frac{1}{g(x)}$ ограничена на множестве $\dot{U}_\delta(a)$.

○ В силу определения предела по заданному числу $\varepsilon = \frac{|B|}{2}$ можно найти число $\delta > 0$ такое, что для всех $x \in \dot{U}_\delta(a)$ выполняется неравенство

$$|g(x) - B| < \frac{|B|}{2}. \quad (8)$$

Из неравенства (8) и известного неравенства

$$|B| - |g(x)| \leq |g(x) - B|$$

следует, что $|B| - |g(x)| < \frac{|B|}{2}$, откуда $|g(x)| > \frac{|B|}{2}$, и поэтому $\frac{1}{|g(x)|} < \frac{2}{|B|}$ для $x \in \dot{U}_\delta(a)$, т. е. функция $\frac{1}{g(x)}$ ограничена на множестве $\dot{U}_\delta(a)$. ●

б) *Свойства пределов, связанные с неравенствами.*

Свойство 1. Если существует число $\delta > 0$ такое, что для всех $x \in \dot{U}_\delta(a)$ выполняются неравенства

$$g(x) \leq f(x) \leq h(x), \quad (9)$$

и если

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = A, \quad (10)$$

то существует $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$.

○ Воспользуемся определением предела функции по Гейне. Пусть $\{x_n\}$ — произвольная последовательность такая, что $x_n \in \dot{U}_\delta(a)$ для $n \in \mathbb{N}$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$. Тогда в силу условия (10) $\lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} h(x_n) = A$.

Так как, согласно условию (9), для всех $n \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство

$$g(x_n) \leq f(x_n) \leq h(x_n),$$

то в силу свойств пределов последовательностей (§ 4, теорема 3) $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$. Следовательно, существует $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$. ●

Свойство 2. Если существует число $\delta > 0$ такое, что для всех $x \in \dot{U}_\delta(a)$ справедливо неравенство $f(x) \leq g(x)$, и если $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = B$, то $A \leq B$.

○ Для доказательства этого свойства достаточно воспользоваться определением предела функции по Гейне и соответствующими свойствами пределов последовательностей (§ 4, теорема 4, следствие 2). ●

Замечание 4. Если исходное неравенство является строгим, т. е. $f(x) < g(x)$, то в случае существования пределов функций f и g в точке a можно утверждать только, что $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow a} g(x)$, т. е. знак строгого неравенства между функциями при переходе к пределу, вообще говоря, не сохраняется.

Упражнение 6. Доказать, что если

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A, \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = B,$$

причем $A < B$, то существует число $\delta > 0$ такое, что для всех $x \in \dot{U}_\delta(a)$ выполняется неравенство $f(x) < g(x)$.

в) **Бесконечно малые функции.** Если $\lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) = 0$, то функцию $\alpha(x)$ называют *бесконечно малой при $x \rightarrow a$* .

Бесконечно малые функции обладают следующими свойствами:

1) сумма конечного числа бесконечно малых при $x \rightarrow a$ функций есть бесконечно малая функция при $x \rightarrow a$;

2) произведение бесконечно малой при $x \rightarrow a$ функции на ограниченную в некоторой проколотой окрестности точки a функцию есть бесконечно малая при $x \rightarrow a$ функция.

Эти свойства легко доказать, используя определения бесконечно малой и ограниченной функции, либо с помощью определения предела функции по Гейне и свойств бесконечно малых последовательностей. Из свойства 2) следует, что произведение конечного числа бесконечно малых при $x \rightarrow a$ функций есть бесконечно малая при $x \rightarrow a$ функция.

Замечание 5. Из определения предела функции и определения бесконечно малой функции следует, что число A является пределом функции $f(x)$ в точке a тогда и только тогда, когда эта функция представляется в виде

$$f(x) = A + a(x),$$

где $a(x)$ — бесконечно малая при $x \rightarrow a$ функция.

Упражнение 7. Показать, что функция $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$ является бесконечно малой при $x \rightarrow 0$.

Упражнение 8. Пусть существует число $\delta > 0$ такое, что $\alpha(x) \neq 0$ для всех $x \in \dot{U}_\delta(a)$. Доказать, что функция $a(x)$ является бесконечно малой при $x \rightarrow a$ тогда и только тогда, когда функция $\frac{1}{\alpha(x)}$ является бесконечно большой при $x \rightarrow a$, т. е.

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{\alpha(x)} = \infty.$$

г) **Свойства пределов, связанные с арифметическими операциями.**

Если функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют конечные пределы в точке a , причем $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = B$, то:

- 1) $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = A + B$;
- 2) $\lim_{x \rightarrow a} (f(x)g(x)) = AB$;
- 3) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$ при условии, что $B \neq 0$.

(11)

○ Для доказательства этих свойств достаточно воспользоваться определением предела функции по Гейне и свойствами пределов последовательностей (§ 5, п. 3). Другой способ доказательства — использование замечания 5 и свойств бесконечно малых функций. ●

Отметим частный случай утверждения (11):

$$\lim_{x \rightarrow a} (Cf(x)) = C \lim_{x \rightarrow a} f(x),$$

т. е. постоянный множитель можно вынести за знак предела.

5. Пределы монотонных функций. Понятие монотонной функции было введено в § 9 (п. 7). Докажем теорему о существовании односторонних пределов у монотонной функции.

Теорема 2. Если функция f определена и является монотонной на отрезке $[a, b]$, то в каждой точке $x_0 \in (a, b)$ эта функция имеет конечные пределы слева и справа, а в точках a и b — соответственно правый и левый пределы.

○ Пусть, например, функция f является возрастающей на отрезке $[a, b]$. Зафиксируем точку $x_0 \in (a, b]$. Тогда

$$\forall x \in [a, x_0) \rightarrow f(x) \leq f(x_0). \quad (12)$$

В силу условия (12) множество значений, которые функция f принимает на промежутке $[a, x_0)$, ограничено сверху, и по теореме о точной верхней грани существует

$$\sup_{a \leq x < x_0} f(x) = M, \quad \text{где } M \leq f(x_0).$$

Согласно определению точной верхней грани (§ 2) выполняются условия:

$$\text{а) } \forall x \in [a, x_0) \rightarrow f(x) \leq M; \quad (13)$$

$$\text{б) } \forall \varepsilon > 0 \quad \exists x_\varepsilon \in [a, x_0): M - \varepsilon < f(x_\varepsilon). \quad (14)$$

Обозначим $\delta = x_0 - x_\varepsilon$, тогда $\delta > 0$, так как $x_\varepsilon < x_0$. Если $x \in (x_\varepsilon, x_0)$, т. е. $x \in (x_0 - \delta, x_0)$, то

$$f(x_\varepsilon) \leq f(x), \quad (15)$$

так как f — возрастающая функция. Из условий (13)–(15) следует, что

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0: \forall x \in (x_0 - \delta, x_0) \rightarrow f(x) \in (M - \varepsilon, M].$$

Согласно определению предела слева это означает, что существует

$$\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = f(x_0 - 0) = M.$$

Итак,

$$f(x_0 - 0) = \sup_{a \leq x < x_0} f(x).$$

Аналогично можно доказать, что функция f имеет в точке $x_0 \in [a, b)$ предел справа, причем

$$f(x_0 + 0) = \inf_{x_0 < x \leq b} f(x). \quad \bullet$$

Следствие. Если функция f определена и возрастает на отрезке $[a, b]$, $x_0 \in (a, b)$, то

$$f(x_0 - 0) < f(x_0) \leq f(x_0 + 0). \quad (16)$$

Замечание 6. Теорема о пределе монотонной функции справедлива для любого конечного или бесконечного промежутка. При этом, если f — возрастающая функция, не ограниченная сверху на (a, b) , то $\lim_{x \rightarrow b-0} f(x) = +\infty$ (в случае, когда $b = +\infty$, пишут $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$), а если f — возрастающая и не ограниченная снизу на промежутке (a, b) функция, то $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = -\infty$ ($\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$).

6. Критерий Коши существования предела функции. Будем говорить, что функция $f(x)$ удовлетворяет в точке $x = a$ условию Коши, если она определена в некоторой проколотой окрестности точки a и

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0: \forall x', x'' \in \dot{U}_\delta(a) \rightarrow |f(x') - f(x'')| < \varepsilon. \quad (17)$$

Лемма. Пусть существует число $\delta > 0$ такое, что функция $f(x)$ определена в проколотой δ -окрестности точки a , и пусть для каждой последовательности $\{x_n\}$, удовлетворяющей условию $x_n \in \dot{U}_\delta(a)$ при всех $n \in \mathbb{N}$ и сходящейся к a , соответствующая последовательность значений функции $\{f(x_n)\}$ имеет конечный предел. Тогда этот предел не зависит от выбора последовательности $\{x_n\}$, т. е. если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A \quad \text{и} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f(\tilde{x}_n) = \tilde{A},$$

где $\tilde{x}_n \in \dot{U}_\delta(a)$ при всех $n \in \mathbb{N}$ и $\tilde{x}_n \rightarrow a$ при $n \rightarrow \infty$, то

$$\tilde{A} = A.$$

○ Образует последовательность

$$x_1, \tilde{x}_1, x_2, \tilde{x}_2, \dots, x_n, \tilde{x}_n, \dots$$

и обозначим k -й член этой последовательности через y_k . Так как $\lim_{k \rightarrow \infty} y_k = a$ (см. § 4, пример 3) и $y_k \in \dot{U}_\delta(a)$ при любом $k \in \mathbb{N}$, то по условию леммы существует конечный $\lim_{k \rightarrow \infty} f(y_k) = A'$. Заметим, что $\{f(x_n)\}$ и $\{f(\tilde{x}_n)\}$ являются подпоследовательностями сходящейся последовательности $\{f(y_k)\}$. Поэтому $A = A'$, $\tilde{A} = A'$, откуда получаем, что $A = \tilde{A}$. $\bullet$

Теорема 3. Для того чтобы существовал конечный предел функции $f(x)$ в точке $x = a$, необходимо и достаточно, чтобы эта функция удовлетворяла в точке a условию Коши (17).

○ **Необходимость.** Пусть $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$; тогда

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0: \forall x \in \dot{U}_\delta(a) \rightarrow |f(x) - A| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (18)$$

Если x', x'' — любые точки из множества $\dot{U}_\delta(a)$, то из (18) следует, что

$$\begin{aligned} |f(x') - f(x'')| &= |(f(x') - A) - (f(x'') - A)| \leq \\ &\leq |f(x') - A| + |f(x'') - A| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \end{aligned}$$

т. е. выполняется условие Коши (17).

Достаточность. Докажем, что если $\exists \delta_0: \dot{U}_{\delta_0}(a) \subset D(f)$ и выполняется условие (17), то существует предел функции f в точке a . Воспользуемся определением предела функции по Гейне. Пусть $\{x_n\}$ — произвольная последовательность такая, что $x_n \in \dot{U}_{\delta_0}(a)$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$. Докажем, что соответствующая последовательность значений функции $\{f(x_n)\}$ имеет конечный предел, не зависящий от выбора последовательности $\{x_n\}$.

Если выполняется условие (17), то для каждого $\varepsilon > 0$ можно найти число $\delta = \delta_\varepsilon > 0$ такое, что

$$\forall x', x'' \in \dot{U}_\delta(a) \rightarrow |f(x') - f(x'')| < \varepsilon. \quad (19)$$

Так как $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, то, задав число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, указанное в условии (19), найдем в силу определения предела последовательности номер $n_\delta = N_\varepsilon$ такой, что

$$\forall n > N_\varepsilon \rightarrow 0 < |x_n - a| < \delta.$$

Это означает, что для любого $n \geq N_\varepsilon$ и для любого $m \geq N_\varepsilon$ выполняются условия $x_n \in \dot{U}_\delta(a)$, $x_m \in \dot{U}_\delta(a)$ и в силу (19) $|f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon$. Таким образом, последовательность $\{f(x_n)\}$ является фундаментальной и согласно критерию Коши для последовательности (§ 8) имеет конечный предел. В силу леммы этот предел не зависит от выбора последовательности $\{x_n\}$, сходящейся к точке a . Следовательно, функция $f(x)$ имеет конечный предел в точке a . ●

Замечание 7. Теорема 3 остается в силе, если точку a заменить одним из символов $a = 0$, $a = +0$, $-\infty$, $+\infty$; при этом условие (17) должно выполняться в окрестности этого символа.