

Лекция №14

4. Показательная функция.

а) Свойства функции a^r , где $a > 1$, $r \in \mathbb{Q}$.

Утверждение 5. Если $a > 1$, то

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0: \forall r \in \mathbb{Q}: |r| < \delta \rightarrow |a^r - 1| < \varepsilon. \quad (18)$$

○ В § 4 (пример 8) было показано, что если $a > 1$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a^{1/n} = 1. \quad (19)$$

Отсюда следует, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a^{-1/n} = 1. \quad (20)$$

Заметим, что соотношения (19) и (20) справедливы и в случае, когда $0 < a \leq 1$.

Из (19) и (20) следует, что если $a > 1$, то

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists p \in \mathbb{N}: 0 < a^{1/p} - 1 < \varepsilon, \quad 0 < 1 - a^{-1/p} < \varepsilon$, где $p = p(\varepsilon)$, откуда получаем

$$1 - \varepsilon < a^{-1/p} < a^{1/p} < 1 + \varepsilon.$$

Пусть r — любое рациональное число такое, что $|r| < 1/p$, т. е. $-1/p < r < 1/p$. Тогда в силу монотонности функции a^r при $a > 1$ (неравенство (16)) получаем

$$a^{-1/p} < a^r < a^{1/p}.$$

Таким образом, для любого $\varepsilon > 0$ существует число $\delta = 1/p > 0$ такое, что для всех рациональных чисел r , удовлетворяющих условию $|r| < \delta$, выполняются неравенства

$$1 - \varepsilon < a^{-1/p} < a^r < a^{1/p} < 1 + \varepsilon,$$

откуда находим $-\varepsilon < a^r - 1 < \varepsilon$, т. е. справедливо утверждение 5. ●

Утверждение 6. Если последовательность рациональных чисел $\{r_n\}$ сходится, то последовательность $\{a^{r_n}\}$, где $a > 1$, также сходится.

○ Из сходимости последовательности $\{r_n\}$ следует ее ограниченность, т. е.

$$\exists \alpha, \beta: \forall n \in \mathbb{N} \rightarrow \alpha \leq r_n \leq \beta, \quad \alpha \in \mathbb{Q}, \quad \beta \in \mathbb{Q},$$

откуда в силу (16) получаем

$$a^\alpha \leq a^{r_n} \leq a^\beta.$$

Учитывая, что $a^\alpha > 0$, и обозначая $C = a^\beta$, находим, что

$$\exists C > 0: \forall n \in \mathbb{N} \rightarrow 0 < a^{r_n} \leq C. \quad (21)$$

В силу (18)

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0: \forall r \in \mathbb{Q}: |r| < \delta \rightarrow |a^r - 1| < \frac{\varepsilon}{C}. \quad (22)$$

Так как сходящаяся последовательность удовлетворяет условию Коши (§ 8), то по найденному в соотношении (22) числу $\delta > 0$ можно подобрать номер

$$N_\varepsilon: \forall n \geq N_\varepsilon, \quad \forall m \geq N_\varepsilon \rightarrow |r_n - r_m| < \delta. \quad (23)$$

Из неравенств (22) и (23) следует, что

$$|a^{r_n - r_m} - 1| < \frac{\varepsilon}{C}. \quad (24)$$

Из неравенств (21) и (24) получаем

$$|a^{r_n} - a^{r_m}| = |a^{r_m}(a^{r_n-r_m} - 1)| < C \frac{\varepsilon}{C} = \varepsilon.$$

Таким образом,

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_\varepsilon: \forall n \geq N_\varepsilon, \quad \forall m \geq N_\varepsilon \rightarrow |a^{r_n} - a^{r_m}| < \varepsilon,$$

т. е. $\{a^{r_n}\}$ — фундаментальная последовательность. В силу критерия Коши она сходится. ●

б) *Определение показательной функции.* Пусть x — произвольная точка числовой прямой, и пусть $\{r_n\}$ — последовательность рациональных чисел, сходящихся к x , т. е. $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = x$. Предполагая, что $a > 0$, положим по определению

$$a^x = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{r_n}. \quad (25)$$

Если $a > 1$, то предел (25) существует в силу утверждения 6. Если $0 < a < 1$, то $a^{r_n} = \frac{1}{b^{r_n}}$, где $b = \frac{1}{a} > 1$, откуда следует, что существует предел (25) и при $a \in (0, 1)$, так как $\lim_{n \rightarrow \infty} b^{r_n} = b^x > 0$ (см. доказанное ниже неравенство (29)). При $a = 1$ предел (25) существует и равен 1, так как $1^r = 1$ для любого $r \in \mathbb{Q}$. Заметим, что определение *показательной функции* является корректным, т. е. предел (25) не зависит от выбора последовательности рациональных чисел, сходящейся к x , в силу леммы из § 10 (п. 6).

в) *Свойства функции* $y = a^x$, $a > 1$.

Свойство 1. Для любых вещественных чисел x_1 и x_2 выполняется равенство

$$a^{x_1} a^{x_2} = a^{x_1+x_2}. \quad (26)$$

○ Пусть $\{r_n\}$ и $\{\rho_n\}$ — последовательности рациональных чисел такие, что $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = x_1$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho_n = x_2$. Тогда $\lim_{n \rightarrow \infty} (r_n + \rho_n) = x_1 + x_2$ и по доказанному выше существуют следующие пределы:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a^{r_n} = a^{x_1}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a^{\rho_n} = a^{x_2}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a^{r_n+\rho_n} = a^{x_1+x_2}.$$

Так как в силу равенства (14) $a^{r_n+\rho_n} = a^{r_n} a^{\rho_n}$, то, переходя в последнем равенстве к пределу при $n \rightarrow \infty$, получаем равенство (26). ●

Из этой формулы, в частности, следует, что для любого $x \in \mathbb{R}$ выполняется равенство

$$a^{-x} = \frac{1}{a^x}. \quad (27)$$

Свойство 2. Функция $y = a^x$, где $a > 1$, строго возрастает на $\mathbb{R}$.

○ Нужно доказать, что

$$\forall x_1 \in \mathbb{R}, \quad \forall x_2 \in \mathbb{R}: x_1 < x_2 \rightarrow a^{x_1} < a^{x_2}. \quad (28)$$

Заметим сначала, что для любого $x \in \mathbb{R}$ выполняется неравенство

$$a^x > 0. \quad (29)$$

В самом деле, пусть $r \in \mathbb{Q}$ и $r < x$. Рассмотрим последовательность рациональных чисел $\{r_n\}$ такую, что $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = x$ и $r_n > r$ при $n \in \mathbb{N}$.

Тогда $a^{r_n} > a^r$ в силу (16), откуда, переходя к пределу, получаем $a^x \geq a^r$, где $a^r > 0$. Итак, $a^x \geq a^r > 0$, т. е. выполняется неравенство (29).

Чтобы доказать неравенство (28), умножим обе части его на $a^{-x_1} > 0$ и, пользуясь свойством 1, получим неравенство

$$a^{x_2 - x_1} > 1, \quad x_2 > x_1,$$

равносильное неравенству (28). Полагая $x_2 - x_1 = x$, получим неравенство

$$a^x > 1, \quad \text{если } x > 0. \quad (30)$$

Итак, для доказательства утверждения (28) достаточно доказать равносильное ему утверждение (30).

Пусть $r \in \mathbb{Q}$ таково, что $0 < r < x$, и пусть $\{r_n\}$ — последовательность рациональных чисел, удовлетворяющая условиям $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = x$ и $r_n > r$ для $n \in \mathbb{N}$. Тогда, используя неравенства (16) и (13), имеем $a^{r_n} > a^r > 1$, откуда, переходя к пределу при $n \rightarrow \infty$, получаем $a^x \geq a^r > 1$. Свойство 2 доказано. ●

Свойство 3. Функция $y = a^x$, где $a > 1$, непрерывна на $\mathbb{R}$.

○ Пусть x_0 — произвольная точка множества $\mathbb{R}$, $\Delta y = a^{x_0 + \Delta x} - a^{x_0} = a^{x_0}(a^{\Delta x} - 1)$. Нужно доказать, что $a^{\Delta x} \rightarrow 1$ при $\Delta x \rightarrow 0$ или

$$\lim_{x \rightarrow 0} a^x = 1. \quad (31)$$

Пусть $\{x_n\}$ — произвольная последовательность вещественных чисел такая, что $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$. В силу свойств вещественных чисел найдутся последовательности рациональных чисел $\{r_n\}$ и $\{r'_n\}$, удовлетворяющие при $n \in \mathbb{N}$ условию

$$x_n - \frac{1}{n} < r_n < x_n < r'_n < x_n + \frac{1}{n},$$

откуда, используя свойство 2, получаем

$$a^{r_n} < a^{x_n} < a^{r'_n}. \quad (32)$$

Так как $r'_n \rightarrow 0$ и $r_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, то из (18) следует, что $\lim_{n \rightarrow \infty} a^{r_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{r'_n} = 1$. Отсюда, используя неравенство (32), получаем $\lim_{n \rightarrow \infty} a^{x_n} = 1$. Утверждение (31) доказано, откуда следует, что существует $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} a^{x_0 + \Delta x}$, равный a^{x_0} , т. е. функция a^x непрерывна в точке x_0 .

Так как x_0 — произвольная точка множества $\mathbb{R}$, то функция a^x непрерывна на $\mathbb{R}$. ●

Свойство 4. Для любого $x_1 \in R$ и любого $x_2 \in R$ справедливо равенство

$$(a^{x_1})^{x_2} = a^{x_1 x_2}. \quad (33)$$

○ а) Пусть $x_2 = r \in Q$, $x_1 \in R$, и пусть $\{r_n\}$ — последовательность рациональных чисел такая, что $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = x_1$. Тогда, используя равенство (14), получаем

$$(a^{r_n})^r = a^{r r_n}. \quad (34)$$

Так как $\lim_{n \rightarrow \infty} r r_n = r x_1$, то по определению показательной функции существует $\lim_{n \rightarrow \infty} a^{r r_n} = a^{r x_1}$.

Обозначим $a^{r_n} = t_n$, $a^{x_1} = t_0$. Тогда по определению показательной функции существует $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = t_0$, и в силу непрерывности степенной функции с рациональным показателем в левой части равенства (34) существует $\lim_{n \rightarrow \infty} (a^{r_n})^r = (a^{x_1})^r$. Отсюда следует, что справедливо равенство

$$(a^{x_1})^r = a^{x_1 r} \quad (35)$$

для любого $x_1 \in R$ и любого $r \in Q$.

б) Пусть x_1 и x_2 — произвольные вещественные числа, и пусть $\{\rho_n\}$ — любая последовательность рациональных чисел такая, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho_n = x_2$. Из равенства (35) при $r = \rho_n$ получаем

$$(a^{x_1})^{\rho_n} = a^{x_1 \rho_n}. \quad (36)$$

Так как $\lim_{n \rightarrow \infty} x_1 \rho_n = x_1 x_2$, то в силу свойства 3 правая часть равенства (36) имеет при $n \rightarrow \infty$ предел, равный $a^{x_1 x_2}$. Покажем, что левая часть (36) имеет предел, равный $(a^{x_1})^{x_2}$. Обозначим $a^{x_1} = b$. Тогда по определению показательной функции существует $\lim_{n \rightarrow \infty} (a^{x_1})^{\rho_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} b^{\rho_n} = b^{x_2} = (a^{x_1})^{x_2}$. Равенство (33) доказано. ●

Свойство 5. Если $a > 1$, то

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty, \quad (37)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0. \quad (38)$$

○ Из неравенства $x \geq [x]$ в силу свойства 2 получаем $a^x \geq a^{[x]}$. Так как $a > 1$, то $a = 1 + \alpha$, где $\alpha > 0$. Применяя неравенство Бернулли, имеем

$$a^{[x]} = (1 + \alpha)^{[x]} > \alpha[x] > \alpha(x - 1).$$

Итак, $a^x > \alpha(x - 1)$, где $\alpha > 0$, откуда следует соотношение (37).

Если $x < 0$, то, используя равенство $a^x = \frac{1}{a^{-x}}$ и соотношение (37), получаем утверждение (38). ●

Итак, показательная функция $y = a^x$, где $a > 1$, непрерывна на всей числовой оси и строго возрастает; множество ее значений — интервал $(0, +\infty)$.

Замечание 2. Свойства 1, 3, 4 остаются в силе и для показательной функции $y = a^x$, где $0 < a < 1$.

Однако в отличие от функции $y = a^x$, $a > 1$, которая является строго возрастающей, функция $y = a^x$, $0 < a < 1$, строго убывает, так как $a^x = \frac{1}{b^x}$, где $b = \frac{1}{a} > 1$. Из (37) и (38) следует, что если $0 < a < 1$, то

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0.$$

На рис. 12.10 и 12.11 изображены графики показательной функции $y = a^x$ для случаев $a > 1$ и $0 < a < 1$.

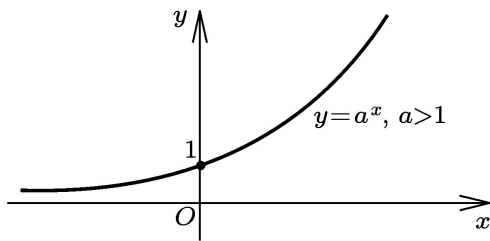


Рис. 12.10

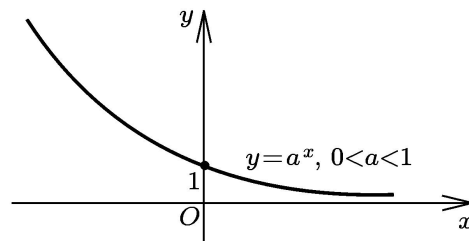


Рис. 12.11

Замечание 3. В качестве основания показательной функции часто используют число e , а функцию $y = e^x$ называют *экспоненциальной* и обозначают $\exp x$.

Пример 3. Построить график функции $y = e^{1/x}$.
 Δ Функция $e^{1/x}$ определена при $x \neq 0$, принимает положительные значения при всех $x \neq 0$, является строго убывающей на интервалах $E_1 = (-\infty, 0)$ и $E_2 = (0, +\infty)$, причем $e^{1/x} < 1$ при $x \in E_1$ и $e^{1/x} > 1$ при $x \in E_2$. Учитывая, что $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{1/x} = 1 - 0$, $\lim_{x \rightarrow -0} e^{1/x} = +0$, $\lim_{x \rightarrow +0} e^{1/x} = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{1/x} = 1 + 0$, строим график функции $y = e^{1/x}$ (рис. 12.12). $\blacktriangle$

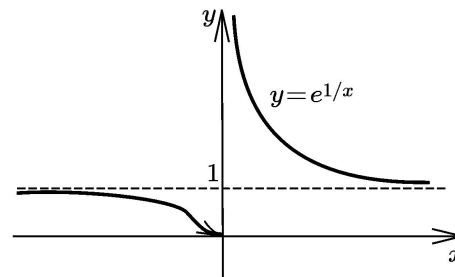


Рис. 12.12

5. Логарифмическая функция. По теореме об обратной функции на промежутке $(0, +\infty)$ определена функция, обратная к функции $y = a^x$, $a > 1$. Эта функция называется *логарифмической* и обозначается $y = \log_a x$. В силу свойств обратных функций логарифмическая функция с основанием $a > 1$ является непрерывной и строго возрас-

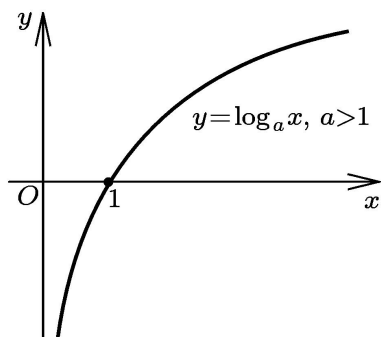


Рис. 12.13

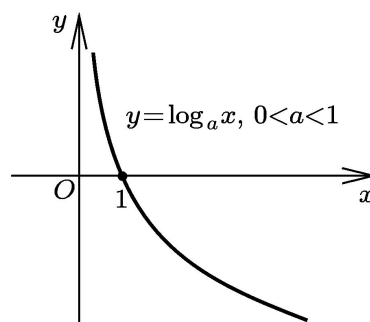


Рис. 12.14

тающей. Множество ее значений — вся числовая прямая. График функции $y = \log_a x$, где $a > 1$, изображен на рис. 12.13.

Аналогично определяется функция $y = \log_a x$, где $0 < a < 1$. Эта функция, график которой изображен на рис. 12.14, является непрерывной и строго убывающей на промежутке $(0, +\infty)$.

Пусть $a > 0$, $a \neq 1$. Тогда по свойствам взаимно обратных функций справедливы равенства

$$\begin{aligned} a^{\log_a x} &= x, & x > 0, \\ \log_a a^x &= x, & x \in R. \end{aligned} \quad (39)$$

Если $x > 0$, $x_1 > 0$, $x_2 > 0$, то из свойства 1 показательной функции и формулы (39) следует, что

$$\begin{aligned} \log_a (x_1 x_2) &= \log_a x_1 + \log_a x_2, \\ \log_a \frac{x_1}{x_2} &= \log_a x_1 - \log_a x_2, \\ \log_a x^\alpha &= \alpha \log_a x, & \alpha \in R. \end{aligned}$$

Логарифмируя равенство (39) по основанию b , где $b > 0$, $b \neq 1$, получаем следующую *формулу перехода от одного основания к другому*:

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a},$$

откуда при $x = b$ находим формулу

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}.$$

Отметим, что в качестве основания логарифмов часто используется число e . Логарифм числа x с основанием e называют *натуральным* и обозначают $\ln x$.

6. Гиперболические функции и обратные к ним. Функции, заданные формулами

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2},$$

называют соответственно *гиперболическим косинусом* и *гиперболическим синусом*.

Эти функции определены и непрерывны на R , причем $\operatorname{ch} x$ — четная функция, а $\operatorname{sh} x$ — нечетная функция. Графики функций $y = \operatorname{ch} x$ и $y = \operatorname{sh} x$ изображены на рис. 12.15.

Из определения гиперболических функций $\operatorname{sh} x$ и $\operatorname{ch} x$ следует, что

$$\operatorname{sh} x + \operatorname{ch} x = e^x, \quad \operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1, \quad (40)$$

$$\operatorname{ch} 2x = 1 + 2 \operatorname{sh}^2 x, \quad \operatorname{sh} 2x = 2 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x. \quad (41)$$

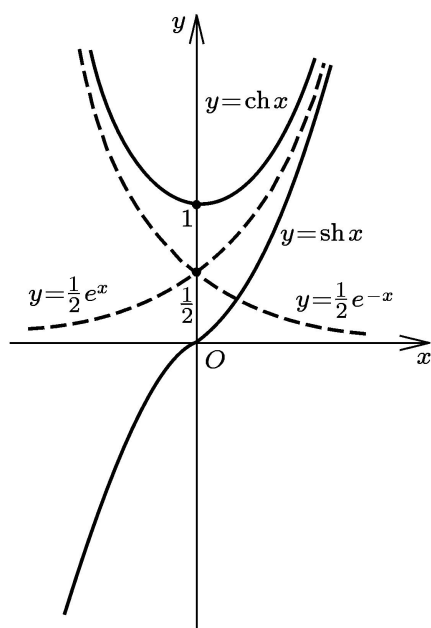


Рис. 12.15

По аналогии с тригонометрическими функциями *гиперболические тангенс* и *котангенс* определяются соответственно формулами

$$\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}, \quad \operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}.$$

Функция $\operatorname{th} x$ определена и непре-

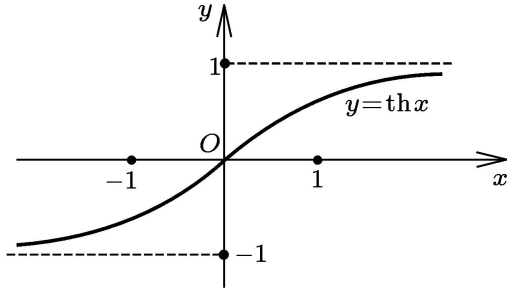


Рис. 12.16

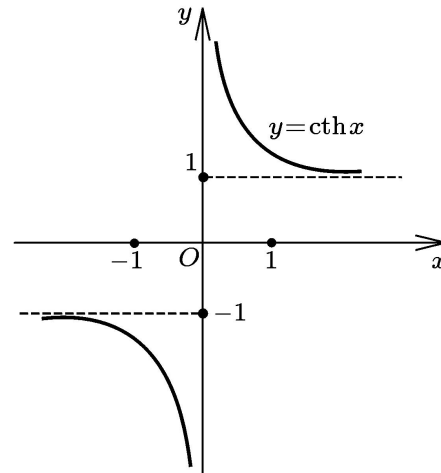


Рис. 12.17

рывна на R , а функция $\operatorname{cth} x$ определена и непрерывна на множестве R с выколотой точкой $x = 0$; обе функции нечетные, их графики представлены на рис. 12.16 и рис. 12.17.

Можно показать (см. § 20, пример 1), что функции $y = \operatorname{sh} x$, $y = \operatorname{th} x$ и $y = \operatorname{ch} x$, $x > 0$, строго возрастающие, а функция $\operatorname{ch} x$, $x \leq 0$, строго убывающая. Поэтому указанные функции обратимы. Обозначим обратные к ним функции соответственно через $\operatorname{arsh} x$, $\operatorname{arth} x$, $\operatorname{arch}_+ x$, $\operatorname{arch}_- x$.

Рассмотрим функцию, обратную к функции $\operatorname{sh} x$, т. е. функцию $\operatorname{arsh} x$ (читается *ареа-синус* от x). Выразим ее через элементарные.

Решая уравнение $\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = y$ относительно x , получаем $e^x = y \pm \sqrt{1 + y^2}$. Так как $e^x > 0$, то $e^x = y + \sqrt{1 + y^2}$, откуда $x = \ln(y + \sqrt{1 + y^2})$. Заменяя x на y , а y на x , находим формулу для функции, обратной для гиперболического синуса:

$$\operatorname{arsh} x = \ln(x + \sqrt{1 + x^2}), \quad x \in R.$$

Замечание 4. Название “гиперболические функции” объясняется тем, что уравнения $x = \operatorname{ch} t$, $y = \operatorname{sh} t$ можно рассматривать как параметрические уравнения гиперболы $x^2 - y^2 = 1$ (см. формулу (40)). Параметр t в уравнениях гиперболы равен удвоенной площади гиперболического сектора (см. [3, т. 2, п. 330]). Это отражено в обозначениях и названиях обратных гиперболических функций, где частица *ar* есть сокращение латинского (и английского) слова *area* — площадь.

Упражнение 4. Доказать формулы

$$\operatorname{sh}(x + y) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y + \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y,$$

$$\operatorname{ch}(x + y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y + \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y,$$

$$\operatorname{arth} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + x}{1 - x}, \quad |x| < 1,$$

$$\begin{aligned}\operatorname{arch}_+ x &= \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}), \quad x \geq 1, \\ \operatorname{arch}_- x &= \ln(x - \sqrt{x^2 - 1}), \quad x \geq 1.\end{aligned}$$

7. Степенная функция с любым вещественным показателем. В п. 3 была рассмотрена степенная функция вида x^r , где $r \in \mathbb{Q}$. Степенная функция с любым вещественным показателем α при $x > 0$ выражается формулой

$$x^\alpha = e^{\alpha \ln x}. \quad (42)$$

Функция x^α непрерывна при $x > 0$ как суперпозиция показательной функции e^t и функции $t = \alpha \ln x$, которые являются непрерывными. Из равенства (42) и свойств показательной и логарифмической функций следует, что функция x^α строго возрастает при $\alpha > 0$ и строго убывает при $\alpha < 0$ на промежутке $(0, +\infty)$. Из формулы (42) и равенства $\ln e^t = t$ следует, что

$$\ln x^\alpha = \alpha \ln x, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad x > 0.$$

Замечание 5. Если $\alpha \in \mathbb{Q}$, то функция x^α может иметь смысл и при $x < 0$. Например, функции x^2 , $\sqrt[3]{x}$ определены на $\mathbb{R}$, а функции $1/x^5$, $1/\sqrt[7]{x}$ определены при всех $x \in \mathbb{R}$, кроме $x = 0$.

8. Показательно-степенная функция. Пусть функции $u(x)$ и $v(x)$ определены на промежутке $\Delta = (a, b)$, причем для всех $x \in \Delta$ выполняется условие $u(x) > 0$. Тогда функцию y , определяемую формулой

$$y = e^{v(x) \ln u(x)},$$

будем называть *показательно-степенной* и обозначать

$$u(x)^{v(x)}.$$

Таким образом, по определению

$$u(x)^{v(x)} = e^{v(x) \ln u(x)}.$$

Если u, v — функции, непрерывные на Δ , то функция u^v непрерывна на Δ как суперпозиция непрерывных функций e^t и $t = v(x) \ln u(x)$.