Лекция № 9 ДВУМЕРНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

Функцией распределения двумерной случайной величины (X, Y) называется вероятность совместного выполнения двух событий $\{X < x\}$ и $\{Y < y\}$:

$$F(x, y) = \mathrm{P}\left(\{X < x\} \cap \{Y < y\}\right). \qquad (1.45)$$

Свойства двумерной функции распределения:

1. $0 \le F(x, y) \le 1$.

2. $F(x, +\infty) = F_1(x)$; $F(+\infty, y) = F_2(y)$; $F(+\infty, +\infty) = 1$.

3. $F(-\infty, y) = F(x, -\infty) = F(-\infty, -\infty) = 0$.

4. $F(x_1, y) \le F(x_2, y)$, если $x_2 > x_1$;

$F(x, y_1) \le F(x, y_2)$, если $y_2 > y_1$.

Функция распределения может задаваться для непрерывных и дискретных случайных величин.

Для непрерывных случайных величин существует плотность распределения или дифференциальный закон распределения:

$$f(x, y) = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{P(\{x \le X < X + \Delta x\} \cap \{y \le Y < y + \Delta y\}}{\Delta x \Delta y} = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y}. \qquad (1.46)$$

Свойства двумерной плотности.

1. $f(x, y) \ge 0$.

2. $F(x, y) = \int\limits_{-\infty}^{x} \int\limits_{-\infty}^{y} f(x, y) dx dy$. (1.47)

3. $\mathrm{P}\{(X, Y) \in D\} = \iint\limits_{(D)} f(x, y) dx dy$. (1.48)

4. Условие нормировки. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx dy = 1$. (1.49)

5. $f_1(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy$; $f_2(y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx$. (1.50)

Для дискретных случайных величин (X, Y) закон распределения задается матрицей вероятностей, содержащей вероятности p_{ij} появления всех возможных пар значений (x_i, y_j):

$$p_{ij} = \mathrm{P}(X = \mathrm{x_i} \cap Y = y_{\mathrm{j}}), \tag{1.51}$$

удовлетворяющих условию

$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M} p_{ij} = 1. \tag{1.52}$$

Одномерные ряды вероятностей составляющих X, Y определяются по формулам

$$p_{i*} = P(X = x_i) = \sum_{j=1}^{M} p_{ij}, \qquad i = 1,\ldots,N; \tag{1.53}$$

$$p_{*j} = P(Y = y_i) = \sum_{i=1}^{N} p_{ij}, \qquad j = 1,\ldots,M. \tag{1.54}$$

Условным законом распределения называется распределение одной случайной величины, найденное при условии, что другая случайная величина приняла определенное значение.

Условные плотности для непрерывных составляющих X и Y определяются по формулам

$$f(x/y) = f(x, y)/f_2(y), \quad f_2(y) \neq 0; \tag{1.55}$$

$$f(y/x) = f(x, y)/f_1(x), \quad f_1(x) \neq 0. \tag{1.56}$$

Условные ряды вероятностей для дискретных составляющих X и Y определяются по формулам

$$p_{i/j} = \mathrm{P}(X = x_i/Y = y_j) = p_{ij}/\mathrm{P}(Y = y_j), \quad i = 1, ..., N; \tag{1.57}$$

$$p_{j/i} = \mathrm{P}(Y = y_j/X = x_i) = p_{ij}/\mathrm{P}(X = x_i), \quad j = 1, ..., M. \tag{1.58}$$

Теорема умножения законов распределений:

для непрерывных величин -

$$f(x, y) = f_1(x) \cdot f(y/x) = f_2(y) \cdot \mathrm{f(x/y)} \tag{1.59}$$

для дискретных величин -

$$p_{ij} = p_{i*} \cdot p_{j/i} = p_{*j} \cdot p_{i/j}. \tag{1.60}$$

Условия независимости случайных величин:

для непрерывных – $$f(x, y) = f_1(x) f_2(y), \qquad (1.61)$$

для дискретных - $$p_{ij} = p_i \cdot p_j, \quad \text{для} \quad \forall\, i, j. \qquad (1.62)$$

Пример 9.1. Двумерная случайная величина (X, Y) распределена по закону, приведенному в таблице:

y_j	x_i	
	$x_1 = 0$	$x_2 = 1$
$y_1 = -1$	0,1	0,2
$y_2 = 0$	0,2	0,3
$y_3 = 1$	0	0,2

Определить одномерные ряды вероятностей величин X и Y, условный ряд вероятностей величины X при условии, что $Y = 0$. Исследовать зависимость случайных величин X и Y.

Решение. Определим ряды вероятностей X и Y по формулам (1.53) и (1.54), т.е. выполним суммирование по столбцам и по строкам:

x_i	0	1
p_{i*}	0,3	0,7

y_j	-1	0	1
p_{*j}	0,3	0,5	0,2

Условный ряд X при $Y = 0$ получаем по формуле (1.57):

x_i	0	1
$p_{i/Y=0}$	0,4	0,6

Величины X и Y зависимы, так как

$P(X = 0,\ Y = 0) \neq P(X = 0) \cdot P(Y = 0)$,

$0{,}2 \neq 0{,}3 \cdot 0{,}5$.

ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ДВУМЕРНЫХ ВЕЛИЧИН

Рассмотрим основные числовые характеристики двумерной случайной величины (X, Y).

Начальный момент порядка $k+s$ равен математическому ожиданию произведения X^k и Y^s:

$$\alpha_{k,s}(x,y) = \mathrm{M}\left[X^k \cdot Y^s\right]. \tag{1.63}$$

Центральный момент порядка $k+s$ равен математическому ожиданию произведения центрированных величин $\overset{\circ}{X}{}^k$ и $\overset{\circ}{Y}{}^s$:

$$\mu_{k,s}(x,y) = \mathrm{M}\left[\overset{\circ}{X}{}^k \overset{\circ}{Y}{}^s\right], \tag{1.64}$$

где $\overset{\circ}{X} = X - m_x$;

$\overset{\circ}{Y} = Y - m_y$.

Расчетные формулы:

$$\alpha_{k,s}(x,y) = \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{m} x_i^k y_j^s p_{i,j} & \text{\textit{для ДСВ}} \\ \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} x^k y^s f(x,y)dxdy & \text{\textit{для НСВ}} \end{cases} \tag{1.65}$$

$$\mu_{k,s}(x,y) = \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{m} (x_i - m_x)^k (y_j - m_y)^s p_{i,j} & \text{\textit{для ДСВ}} \\ \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^k (y - m_y)^s f(x,y)dxdy & \text{\textit{для НСВ}} \end{cases} \tag{1.66}$$

где p_{ij} - элементы матрицы вероятностей дискретной величины (X, Y);

$f(x, y)$-совместная плотность вероятности непрерывной величины (X, Y).

Рассмотрим наиболее часто используемые начальные и центральные моменты:

$\alpha_{0,0}(x, y) = \mu_{0,0}(x, y) = 1$; $\alpha_{1,0}(x, y) = m_x$; $\alpha_{0,1}(x, y) = m_y$;

$\mu_{1,0}(x, y) = \mu_{0,1}(x, y) = 0$; $\alpha_{2,0}(x, y) = \alpha_2(x)$; $\alpha_{0,2}(x, y) = \alpha_2(y)$;

$\mu_{2,0}(x, y) = D_x$; $\mu_{0,2}(x, y) = D_y$; $\mu_{1,1}(x, y) = K_{xy}$.

Корреляционный момент K_{xy} характеризует степень линейной зависимости величин X и Y и рассеивание относительно точки (m_x, m_y).

Вычислить K_{xy} можно и через начальные моменты:

$$K_{xy} = \alpha_{1,1}(x, y) - m_x \cdot m_y. \qquad (1.67)$$

Коэффициент корреляции r_{xy} характеризует степень линейной зависимости величин:

$$r_{xy} = \frac{k_{xy}}{\sqrt{D_x D_y}} = \frac{k_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} \qquad (1.68)$$

Для любых случайных величин $|r_{xy}| \le 1$.

Если величины X и Y независимы, то $r_{xy} = 0$.

Пример 10.1 Определить коэффициент корреляции величин X и Y (см. пример 9.1).

Решение. Определим математические ожидания величин X и Y по формуле (1.65):

$$m_x = \alpha_{1,0}(x, y) = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{3} x_i p_{ij} = 0\cdot 0{,}1 + 0\cdot 0{,}2 + 0\cdot 0 + 1\cdot 0{,}2 +$$

$$+ 1\cdot 0{,}3 + 1\cdot 0{,}2 = 0{,}7\ ,$$

$$m_y = \alpha_{0,1}(x, y) = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{3} y_j p_{ij} = -1\cdot 0{,}1 - 1\cdot 0{,}2 + 0\cdot 0{,}2 + 0\cdot 0{,}3 +$$

$$+ 1\cdot 0 + 1\cdot 0{,}2 = -0{,}1\ .$$

Найдем значение K_{xy} по формуле (1.67):

$$K_{xy} = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{3} x_i y_j p_{ij} - m_x m_y = 0\cdot(-1)\cdot 0{,}1 + 0\cdot 0\cdot 0{,}2 + 0\cdot 1\cdot 0 +$$

$$+1\cdot(-1)\cdot 0{,}2 + 1\cdot 0\cdot 0{,}3 + 1\cdot 1\cdot 0{,}2 - 0{,}7\cdot(-0{,}1) = 0{,}07.$$

Определим дисперсии величин X и Y по формуле (1.66):

$$D_x=\mu_{2,0}(x,y)=\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{3}(x_i-m_x)^2 p_{ij}=(-0,7)^2\cdot 0,1+(-0,7)^2\cdot 0,2+(-0,7)^2\cdot 0+$$

$$+(0,3)^2\cdot 0,2+(0,3)^2\cdot 0,3+(0,3)^2\cdot 0,2=0,21\ ,$$

$$D_y=\mu_{0,2}(x,y)=\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{3}(y_j-m_y)^2 p_{ij}=(-0,9)^2\cdot 0,1+(-0,9)^2\cdot 0,2+(0,1)^2\cdot 0,2+$$

$$+(0,1)^2\cdot 0,3+(1,1)^2\cdot 0+(1,1)^2\cdot 0,2=0,49.$$

Значение коэффициента корреляции r_{xy} вычислим по формуле (1.68):

$$r_{xy}=\frac{K_{xy}}{\sqrt{D_x D_y}}=\frac{0,07}{\sqrt{0,21\cdot 0,49}}\approx 0,22\,.$$

Пример 10.2 Двумерная случайная величина равномерно распределена в области D, ограниченной прямыми $X = 0$, $Y = 0$ и $X + Y = 4$. Определить коэффициент корреляции величин X и Y.

Решение. Запишем в аналитической форме совместную плотность вероятности:

$$f(x,y)=\begin{cases} c, & 0\le x\le 4,\ 0\le y\le 4-x \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Определим c, используя условие нормировки (1.49):

$$\int_0^4\int_0^{4-x} c\,dxdy=c\int_0^4(4-x)dx=c\cdot 8=1\Rightarrow c=\frac{1}{8}.$$

Найдем математическое ожидание и дисперсию величины X по формулам (1.65) и (1.66) соответственно:

$$m_x=\alpha_{1,0}\,(x,y)=\int_0^4\int_0^{4-x} x\frac{1}{8}dxdy=\frac{1}{8}\int_0^4 xdx\int_0^{4-x}dy=\frac{1}{8}\int_0^4 x(4-x)dx=\frac{4}{3}\ ;$$

$$D_x=\mu_{2,0}\,(x,y)=\int_0^4\int_0^{4-x}(x-m_x)^2\frac{1}{8}dxdy=\frac{1}{8}\int_0^4(x-\frac{4}{3})^2(4-x)dx=\frac{8}{9}.$$

Так как область D симметрична относительно осей координат, то величины X и Y будут иметь одинаковые числовые характеристики:

$m_x = m_y = 4/3$, $\quad D_x = D_y = 8/9$.

Определим корреляционный момент K_{xy} по формуле (1.67):

$$K_{xy}=\int_0^4\int_0^{4-x} xy\frac{1}{8}dxdy-m_x\cdot m_y=\frac{1}{8}\int_0^4 xdx\int_0^{4-x} ydy-\left(\frac{4}{3}\right)^2=\frac{1}{16}\int_0^4 x(4-x)^2\,dx-\left(\frac{4}{3}\right)^2=-\frac{4}{9}.$$

Коэффициент корреляции величин X и Y будет равен (1.68):

$$r_{xy}=\frac{K_{xy}}{\sqrt{D_x D_y}}=-\frac{1}{2}.$$