Модуль: КРИВЫЕ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Конические сечения

Аннотация

В данной лекции описываются получение эллипса, гиперболы и параболы как конических сечений, доказывается кривые второго порядка можно получить сечением с плоскостями не проходящих через вершины конуса.

***Базовые фразы**: коническое сечение, директриса, фокус, эксцентриситет конических сечений.*

Конические сечения

В предыдущем параграфе при введении определения параболы мы использовали фокус и прямую, называемую директрисой. Приведем это определение теперь в ином виде.

Пусть на плоскости заданы некоторая прямая D и точка F, не лежащая на ней.

Определение. Геометрическое место точек плоскости, для которых отношение расстояния от любой точки до данной точки F к расстоянию от этой же точки до данной прямой D на плоскости является постоянной величиной, равной единице, называется параболой.

Эллипс (кроме окружности) и гипербола имеют по два фокуса, поэтому речь идет о директрисе, соответствующей каждому фокусу.

Директрисой, соответствующей фокусу F эллипса (гиперболы), называется прямая, перпендикулярная фокальной оси, расположенная на расстоянии $\frac{a}{e}$ от центра и находящаяся с той же стороны от центра, что и фокус. Таким образом, эллипс (кроме окружности) и гипербола имеют по две директрисы.

Если прямоугольная система координат выбрана канонически, как в предыдущем параграфе, то директрисы D_1 и D_2 (соответствующие фокусам F_1 и F_2) определяются уравнениями:

$$x = -\frac{a}{e} \quad \text{и} \quad x = \frac{a}{e}$$

Найдем расстояние от соответствующих фокусов до директрисы:

в случае эллипса: $d = \frac{a}{e} - ae = a\frac{1-e^2}{e} = \frac{1}{e}\cdot\frac{b^2}{a}$;

в случае гиперболы: $d = ae - \frac{a}{e} = a\frac{e^2-1}{e} = \frac{1}{e}\cdot\frac{b^2}{a}$.

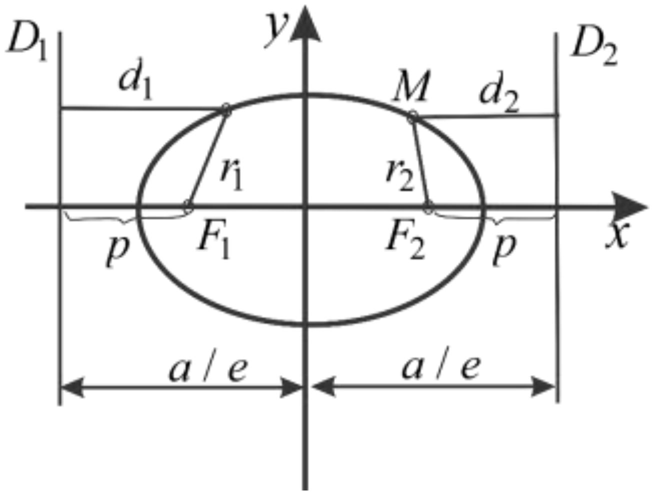

Рисунок 1

Пусть задан некоторый C эллипс или гипербола. Обозначим один из его фокусов через F, а соответствующую ему директрису — через D. Докажем, что отношение расстояния r от произвольной точки M до точки F к расстоянию d от этой точки до прямой D является величиной постоянной, равной $e=\frac{r}{d}$.

Достаточно доказать это равенство для случая, когда фокус совпадает с левым фокусом $(F=F_1)$ и система координат является канонической.

В этом случае $r=|a+ex|$, $d=\left|x+\frac{a}{e}\right|$, откуда следует $e=\frac{r}{d}$.

Следовательно, отношение справедливо для всех точек линии C.

Теперь докажем обратное. Если для некоторой точки $M(x;y)$ плоскости отношение $e=\frac{r}{d}$ постоянно, то покажем, что точка $M(x;y)$ лежит на линии C.

Действительно, предположим, что точка $F(-c;0)$— левый фокус линии C, а прямая D задана уравнением $x=-\frac{a}{e}$. Тогда

$$r^2=(x+c)^2+y^2,\ d^2=\left(x+\frac{a}{e}\right)^2=\left(x+\frac{a^2}{c}\right)^2.$$

По предположению, для точки $M(x;y)$ выполняется отношение $e=\frac{r}{d}$. Отсюда:

$$e^2=\frac{r^2}{d^2}=\frac{c^2}{a^2}\Rightarrow\frac{(x+c)^2+y^2}{\left(x+\frac{a^2}{c}\right)^2}=\frac{c^2}{a^2}\Rightarrow a^2(x+c)^2+a^2y^2=c^2\left(x+\frac{a^2}{c}\right)^2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left(a^2-c^2\right)x^2+a^2y^2=a^2\left(a^2-c^2\right).$$

Если линия C является эллипсом, учитывая $e = \frac{c}{a} < 1$ и введя обозначение $a^2 - c^2 = b^2$, мы получим уравнение $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ или $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ в результате чего точка $M(x; y)$ лежит на эллипсе.

Если линия C является гиперболой, учитывая $e = \frac{c}{a} > 1$ и введя обозначение $a^2 - c^2 = -b^2$, мы получим уравнение $-b^2x^2 + a^2y^2 = -a^2b^2$ или $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ в результате чего точка М лежит на гиперболе.

Таким образом, мы доказали следующую теорему:

Теорема. Эллипс или гипербола с эксцентриситетом e представляет собой геометрическое место точек M, для которых отношение расстояния до фокуса F к расстоянию до директрисы D равно e.

Можно доказать и обратную теорему.

Пусть на плоскости заданы прямая D, точка F, не лежащая на ней, и число $e \neq 1$.

Теорема. Существует эллипс при $e < 1$ и гипербола при $e > 1$, фокус которых находится в точке F, соответствующая директриса — прямая D, а эксцентриситет равен e.

Доказательство этой теоремы оставляем учащимся.

Определение. Отношение расстояния r от любой точки M к точке F к расстоянию d от этой точки до прямой D на плоскости является постоянным и равным $e = \frac{r}{d}$, называется: эллипсом при $(0 \leq e < 1)$, параболой при $(e = 1)$, гиперболой при $(e > 1)$. Точка F, прямая D и число e называются соответственно фокусом, директрисой и эксцентриситетом геометрического места точек.

Теорема. Пусть дана линия L, являющаяся эллипсом, гиперболой или параболой. Тогда можно указать такой конус вращения K и плоскость π, что их пересечением будет эта линия L.

Перед доказательством приведем следующее замечание.

Замечание. Пусть пересечение конуса $L^* -\ K$ плоскостью π^*, не проходящей через вершину, есть линия L, подобная линии L^*. Тогда найдется такая плоскость π, пересечение которой с конусом K будет линией L.

Существование такой плоскости нетрудно увидеть, так как параллельные плоскости пересекают конус по подобным линиям. Коэффициент подобия равен отношению расстояний от вершины конуса до этих плоскостей.

Доказательство теоремы. Очевидно, что пересечение конуса K плоскостью, перпендикулярной его оси, является окружностью. Окружность — это эллипс с эксцентриситетом $e=0$.

Теперь возьмем плоскость π^*, не перпендикулярную оси конуса K и не проходящую через его вершину. Обозначим сечение конуса этой плоскостью через L^*. Впишем в конус K сферу S, касающуюся плоскости π^* в точке F. Известно, что сфера S, вписанная в конус K, касается его по окружности R; обозначим плоскость этой окружности через ω, а линию пересечения плоскостей π^* и ω — через D. Докажем, что L^* удовлетворяет условиям определения и является эллипсом, гиперболой или параболой. В ходе рассуждений можно убедиться, что в зависимости от наклона плоскости π^* и угла между образующей и осью конуса можно получить любой положительный эксцентриситет. Поскольку любые линии второго порядка с одинаковым эксцентриситетом подобны, доказательство завершается согласно приведенному выше замечанию.

Пусть M произвольная точка линии L^*, MP — перпендикуляр, опущенный из этой точки на плоскость ω, MQ — перпендикуляр, опущенный из точки M на прямую D, MF — отрезок, соединяющий M и F, MN — часть образующей конуса (проходящей через M, где N — точка пересечения образующей с окружностью R).

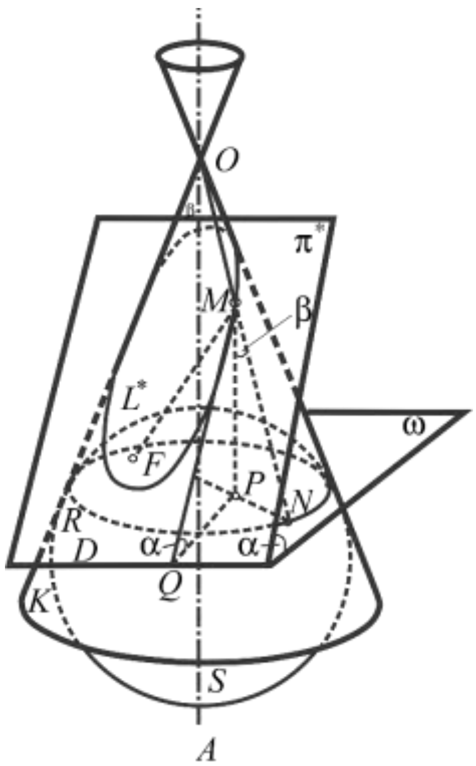

Рисунок 2.

Так как отрезки MF и MN являются касательными к сфере S, проведенными из одной точки M, то $|MF| = |MN|$.

Обозначив угол между образующей и осью конуса K через β, а угол между плоскостями π^* и ω через α, показать изменения на $0<\beta<\frac{\pi}{2}$, $0<\alpha\le\frac{\pi}{2}$ не трудно.

Из прямоугольных треугольников MPN и MPQ, и $|MN|=|MF|$ получаем следующие соотношения:

$$|MF|=\frac{|MP|}{\cos\beta},\ |MQ|=\frac{|MP|}{\sin\alpha}$$

Следовательно, для любой точки M линии L^* справедливо:

$$\frac{|MF|}{|MQ|}=\frac{\sin\alpha}{\cos\beta}.$$

Для данного конуса и фиксированной плоскости π^* отношение $\frac{\sin\alpha}{\cos\beta}$ не зависит от точки M, линия L^* будет эллипсом, гиперболой или параболой, отличающейся от окружности. Эксцентриситет e этой линии L^* находится по формуле:

$$e=\frac{\sin\alpha}{\cos\beta}.$$

Покажем, что за счет выбора углов α и β эксцентриситет e может принимать любое положительное значение. Во-первых, выберем угол β так, чтобы величина $e\cos\beta<1$. Мы можем так выбрать, потому что угол β между $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$. Теперь остается выбрать угол α так, чтобы выполнялось равенство $\sin\alpha=e\cos\beta$. Очевидно, если взять

$\alpha = \arcsin(e\cos\beta)$, то указанное выше условие выполняется. Теорема доказана.

Вопросы для самопроверки

1. Что называется коническими сечениями?
2. Докажите эквивалентность двух определений параболы.
3. Докажите эквивалентность определений эллипса и гиперболы через эксцентриситет и через фокальные свойства.

ТЕМЫ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

1. Эллипс, гипербола, парабола как конические сечения
2. Определение эллипса как ортогональной проекции окружности
3. Эллипс как сечение кругового цилиндра
4. Получение эллипса путем равномерного сжатия (растяжения) окружности вдоль координатной оси
5. Применение оптических свойств линий второго порядка в физике и технике
6. Применение фокальных свойств линий второго порядка в физике и технике.

ГЛОССАРИЙ (GLOSSARY)

Коническое сечение — сечение, полученное при пересечении кругового конуса плоскостью, не проходящей через его вершину. Если плоскость перпендикулярна оси конуса — получается окружность, если параллельна образующей конуса — парабола, если параллельна оси конуса — гипербола, в остальных случаях — эллипс.