Модуль: КРИВЫЕ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Уравнения эллипса, параболы и гиперболы в полярной системе координат и касательных к кривым второго порядка

Аннотация

В данной лекции приводится метод получения уравнения линий второго порядка в полярных координатах. А также выводятся уравнения касательных эллипса, параболы и гиперболы

Базовые фразы: *коническое сечение, полярная система координат, касательная, оптическое свойство.*

Уравнения эллипса, параболы и гиперболы в полярной системе координат

Сначала рассмотрим уравнение окружности радиуса R. Если полюс находится в центре, а полярная ось выбрана произвольно, уравнение имеет вид $\rho = R$. Пусть дана линия L, определяющая эллипс (отличный от окружности), гиперболу или параболу. Обозначим фокус через F, соответствующую директрису через D, расстояние от фокуса F до директрисы D через p, а эксцентриситет через e. Выберем полярную систему координат так, чтобы полюс совпал с F, а полярная ось была перпендикулярна директрисе и направлена от нее к фокусу. Для точки M на линии L, согласно определению, справедливо отношение:

$$\frac{|FM|}{|MP|} = e \qquad (1)$$

Подставляя выражения $|FM| = \rho$, $|MP| = |PN + NM| = p + \rho\cos\varphi$ в уравнение (1), получим уравнение эллипса или параболы в полярных координатах:

$$\rho = \frac{pe}{1 - e\cos\varphi} \qquad (2)$$

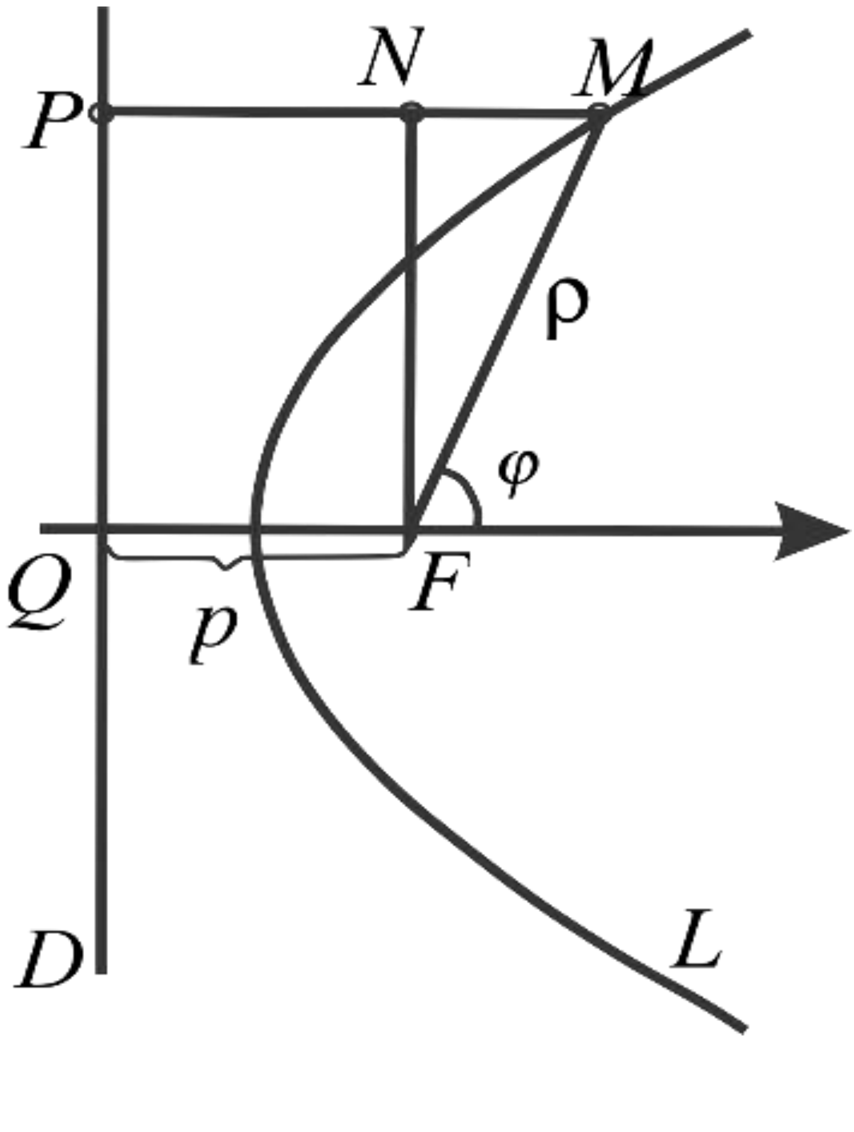

Рисунок 1.

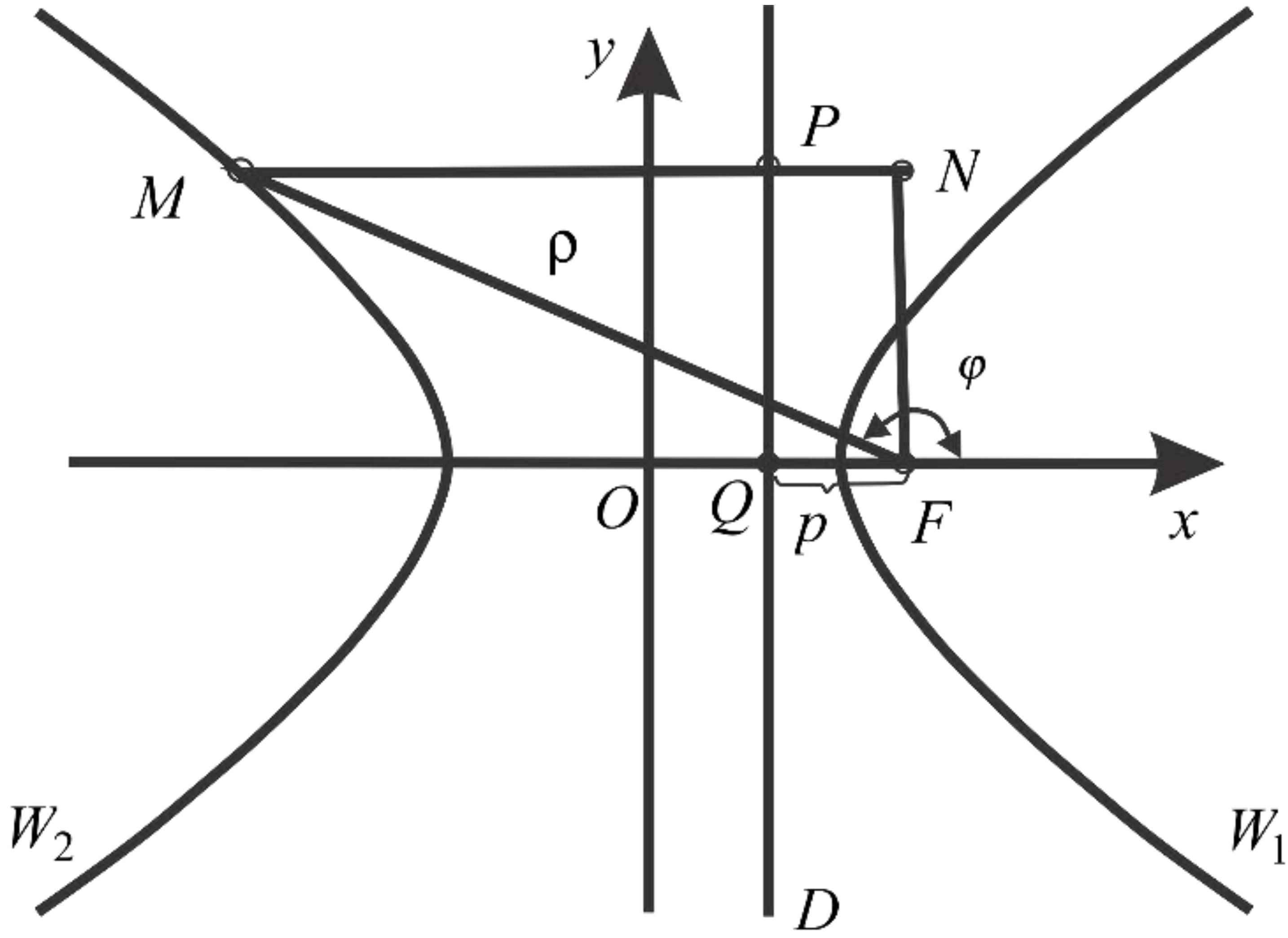

Рисунок 2

В случае, когда линия L является гиперболой, для обеих ветвей получаются отдельные уравнения. Обозначим правый фокус через F, директрису через D, расстояние от фокуса F до директрисы D через p, эксцентриситет через e. Пусть W_1 — ветвь гиперболы, соответствующая фокусу F (правая ветвь), а W_2 — другая ветвь (левая). Аналогичными рассуждениями получим, что уравнение ветви W_1 имеет вид (2). Для ветви W_2 уравнение имеет вид (1). Теперь, из отношении $|FM| = \rho$,

$|MP|=|MN-PN|=-\rho\cos\varphi-p$ уравнение ветви W_2 гиперболы примет вид

$\rho=\dfrac{-pe}{1+e\cos\varphi}$.

Таким образом, уравнение гиперболы в полярных координатах:

$$\rho=\begin{cases}\dfrac{pe}{1-e\cos\varphi}, agar\, M \in W_1\\ \dfrac{-pe}{1+e\cos\varphi}, agar\, M \in W_2\end{cases} \qquad (3)$$

где знак "+" соответствует правой ветви, знак "-" — левой ветви.

Примечание. В формулах (2) и (3) знаменатель не обращается в ноль, так как в случае эллипса, так как $0<e<1$, имеем $1-e\cos\varphi>0$. В случае параболы, поскольку $e=1$, также выполняется $1-\cos\varphi>0$ при $\varphi\in(0;2\pi)$. В случае гиперболы для точек на ветви W_1 угол $\varphi\in\left(\arccos\frac{1}{e};2\pi-\arccos\frac{1}{e}\right)$, откуда следует, что $0<e\cos\varphi<1$ или $e\cos\varphi<0$. Для точек на ветви W_2 угол $\varphi\in\left(\arccos\left(-\frac{1}{e}\right);2\pi-\arccos\left(-\frac{1}{e}\right)\right)$, в результате чего выполняется $e\cos\varphi<0$ va $|e\cos\varphi|>1$.

Уравнения касательных и оптические свойства эллипса, параболы и гиперболы

Пусть эллипс задан каноническим уравнением:

$$L:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

Составим уравнение касательной к нему в точке $(x_0;y_0)$. Если разрешить уравнение эллипса относительно y, оно распадается на две части:

$$\text{Часть } y \ge 0 \;\; L^{+} : y = b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}, \; -a \le x \le a,$$

$$\text{Часть } y \le 0 \;\; L^{+} : y = -b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}, \; -a \le x \le a.$$

Используя формулу касательной к графику функции в заданной точке и вычисляя производные:

$$L^{+} : y' = -\frac{bx_0}{a^2\sqrt{1-\frac{x_0^2}{a^2}}}, \quad L^{-} : y' = \frac{bx_0}{a^2\sqrt{1-\frac{x_0^2}{a^2}}} \;\; L^{+} : Y - y_0 = -\frac{bx_0}{a^2\sqrt{1-\frac{x_0^2}{a^2}}}\left(X - x_0\right)$$

$$L^{+} : Y - y_0 = -\frac{b^2x_0}{a^2y_0}\left(X - x_0\right), \quad L^{-} : Y - y_0 = -\frac{b^2x_0}{a^2y_0}\left(X - x_0\right).$$

В обоих случаях получаем уравнение касательной:

$$\frac{Xx_0}{a^2} + \frac{Yy_0}{b^2} = 1$$

Аналогично выводятся уравнения касательных для гиперболы и параболы:

Для гиперболы: $\frac{Xx_0}{a^2} - \frac{Yy_0}{b^2} = 1$, для параболы: $Yy_0 = p\left(X + x_0\right)$.

Примеры

1. При каких необходимых и достаточных условиях прямая $y = kx + m$ касается эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$?

2. Условия, при которых прямая $y = -x + m$

   1. касается эллипса $\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{5} = 1$

2. пересекает эллипс
3. не пересекает эллипс?

3. Составьте уравнения касательных к эллипсу $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$, проходящих через точку $N(10,4)$.

4. Найдите касательные к эллипсу $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$, параллельные прямой $x+y-1=0$.

5. Составьте уравнения общих касательных к эллипсам $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{4}=1$, $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{5}=1$.

6. Напишите уравнение касательной к гиперболе $\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{4}=1$ в точке (5, -4).

7. Напишите уравнение касательной к гиперболе $x^2-y^2=8$ в точке $M(3,-1)$.

8. Напишите уравнения касательных к гиперболе $x^2-\frac{y^2}{4}=1$, проходящих через точку $M(1,4)$.

9. Для гиперболы $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{36}=1$ составьте уравнения касательных, проведенных:

1. параллельно прямой $3x-y-17=0$
2. перпендикулярно прямой $2x+5y+11=0$

10. Найдите необходимое и достаточное условие для того, чтобы прямая $Ax+By+C=0$ была касательной к гиперболе $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$.

11. Найдите произведение расстояний от фокусов гиперболы $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ до произвольной её касательной.

12. Составьте уравнение касательной к параболе $y^2=4x$, проведенной в точке $M(9,6)$.

13. Дано уравнение касательной $x-3y+9=0$, проведенной к параболе $y^2=2px$. Составьте уравнение параболы.

14. Найдите необходимое и достаточное условие для касания прямой $Ax+By+C=0$ к параболе $y^2=2px$.

15. Напишите уравнение прямой, параллельной прямой $y=kx+b$ и касающейся параболы $y^2=2px$.

16. Определите общие касательные к параболе $y^2=4x$ и эллипсу $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2}=1$.

Вопросы для самопроверки

1. Выведите уравнение эллипса в полярных координатах.
2. Выведите уравнение параболы в полярных координатах.
3. Выведите уравнение гиперболы в полярных координатах.
4. Выведите уравнение касательной к эллипсу.
5. Выведите уравнение касательной к параболе.
6. Выведите уравнение касательной к гиперболе.

Тестовые вопросы по теме

1. Укажите правильное уравнение касательной к окружности $x^2+y^2=1$ в точке $M_0(1,0)$

A) $x=1$ B) $x=-1$ C) $y=1$ D) $y=-1$

2. Уравнение касательной к гиперболе $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ в точке $M_0(x_0,y_0)$.

A) $\frac{xx_0}{a^2}-\frac{yy_0}{b^2}=1$ B) $\frac{x-x_0}{a^2}-\frac{y-y_0}{b^2}=1$

C) $\frac{x-x_0}{a^2}+\frac{y-y_0}{b^2}=0$ D) $\frac{xx_0}{a^2}-\frac{yy_0}{b^2}=0$

3. Уравнение касательной к параболе $y^2=2px$ в точке $M_0(x_0,y_0)$.

A) $yy_0=p(x+x_0)$ B) $y-y_0=p(x-x_0)$ C) $y+y_0=p(x+x_0)$

D) $yy_0=p(x-x_0)$

4. Уравнение касательной к эллипсу $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ в точке $M_0(x_0,y_0)$.

A) $\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}=1$ B) $\frac{x-x_0}{a^2}+\frac{y-y_0}{b^2}=1$ C) $\frac{x-x_0}{a^2}+\frac{y-y_0}{b^2}=0$ D) $\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}=0$

5. Какая линия второго порядка задана уравнением $\rho=\frac{5}{1-\frac{1}{2}\cos\varphi}$?

A) эллипс B) гипербола C) парабола D) окружность

6. Какая линия второго порядка задана уравнением $\rho=\frac{6}{1-\cos\varphi}$?

A) парабола B) гипербола C) эллипс D) окружность

7. Какая линия второго порядка задана уравнением $\rho=\frac{10}{1-\frac{3}{2}\cos\varphi}$?

A) гипербола B) эллипс C) парабола D) окружность

8. Найдите точку, при котором для эллипса $\rho=\frac{12}{3-\sqrt{2}\cos\varphi}$ полярный радиус равен 6.

A) $\left(6;\frac{\pi}{4}\right),\left(6;\frac{7\pi}{4}\right)$ B) $\left(6;\frac{\pi}{4}\right),\left(6;-\frac{\pi}{4}\right)$ C) $\left(6;\frac{\pi}{2}\right),\left(6;-\frac{\pi}{2}\right)$ D) $\left(6;\frac{\pi}{3}\right),\left(6;\frac{5\pi}{3}\right)$

9. Найдите точку, при котором для гиперболы $\rho=\frac{15}{3-4\cos\varphi}$ полярный радиус равен 3.

A) $\left(3;\frac{2\pi}{3}\right),\left(3;\frac{4\pi}{3}\right)$ B) $\left(3;\frac{\pi}{4}\right),\left(3;-\frac{\pi}{4}\right)$ C) $\left(3;\frac{\pi}{2}\right),\left(3;-\frac{\pi}{2}\right)$ D) $\left(3;\frac{\pi}{3}\right),\left(3;\frac{5\pi}{3}\right)$

10. Найдите точку, при котором для параболы $\rho=\frac{p}{1-\cos\varphi}$ полярный радиус равен параметру параболы.

A) $\left(p;\frac{\pi}{2}\right),\left(p;\frac{3\pi}{2}\right)$ B) $\left(p;\frac{\pi}{4}\right),\left(p;-\frac{\pi}{4}\right)$ C) $\left(p;\frac{\pi}{2}\right),\left(p;-\frac{\pi}{2}\right)$ D) $\left(p;\frac{\pi}{3}\right),\left(p;\frac{5\pi}{3}\right)$

ГЛОССАРИЙ (GLOSSARY)

Коническое сечение — сечение, полученное при пересечении кругового конуса плоскостью, не проходящей через его вершину. Если плоскость перпендикулярна оси конуса — получается окружность, если параллельна образующей конуса — парабола, если параллельна оси конуса — гипербола, в остальных случаях — эллипс.

Касательная к линии второго порядка — прямая неасимптотического направления, имеющая с линией второго порядка единственную общую точку.

Директриса эллипса (гиперболы), соответствующая фокусу — прямая, перпендикулярная фокальной оси, находящаяся на расстоянии от центра и расположенная с той же стороны от центра, что и фокус.