Модуль: КРИВЫЕ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Оптические свойства параболы, гиперболы и эллипса

Аннотация

В данной лекции приводится метод доказательства оптических свойств эллипса, параболы и гиперболы

Базовые фразы: коническое сечение, полярная система координат, касательная, оптическое свойство.

Оптическое свойство эллипса. Если источник света поместить в один фокус эллипса, то лучи, отразившись от эллиптического зеркала, соберутся в другом его фокусе. С геометрической точки зрения, касательная в любой точке эллипса образует равные углы с отрезками MF_1 и MF_2, соединяющими эту точку с фокусами. Другими словами, угол падения луча равен углу отражения.

Доказательство. Рассмотрим каноническое уравнение эллипса,

$$L: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

уравнение касательной, проведенной к этому эллипсу в точке $M\left(x_0; y_0\right)$ и напишем координаты векторов $\overrightarrow{MF_1}$ и $\overrightarrow{MF_2}$:

$$l: \frac{Xx_0}{a^2} + \frac{Yy_0}{b^2} = 1, \ \overrightarrow{MF_1}\left(-c - x_0; -y_0\right), \ \overrightarrow{MF_2}\left(c - x_0; -y_0\right).$$

Докажем равенство синусов углов между отрезками $\overrightarrow{MF_1}$ и $\overrightarrow{MF_2}$ и касательной, проведенной к эллипсу в точке $M\left(x_0; y_0\right)$.

$$\sin\alpha = \frac{\rho(F_1,l)}{|MF_1|} = \frac{\rho(F_2,l)}{|MF_2|} = \sin\beta\,.$$

$$\sin\alpha = \frac{\rho(F_1,l)}{|MF_1|} = \frac{\left|\frac{-cx_0}{a^2} - 1\right|}{\sqrt{\frac{x_0^2}{a^4} + \frac{y_0^2}{b^4}}\sqrt{(-c-x_0)^2 + (-y_0)^2}} =$$

$$\frac{\left|\frac{cx_0}{a^2} + 1\right|}{\sqrt{\frac{x_0^2}{a^4} + \frac{y_0^2}{b^4}}\sqrt{\left(\frac{cx_0}{a} + a\right)^2}} = \frac{1}{a\sqrt{\frac{x_0^2}{a^4} + \frac{y_0^2}{b^4}}}.$$

$$\sin\beta = \frac{\rho(F_2,l)}{|MF_2|} = \frac{\left|\frac{cx_0}{a^2} - 1\right|}{\sqrt{\frac{x_0^2}{a^4} + \frac{y_0^2}{b^4}}\sqrt{(c-x_0)^2 + (-y_0)^2}} =$$

$$\frac{\left|\frac{cx_0}{a^2} - 1\right|}{\sqrt{\frac{x_0^2}{a^4} + \frac{y_0^2}{b^4}}\sqrt{\left(\frac{cx_0}{a} - a\right)^2}} = \frac{1}{a\sqrt{\frac{x_0^2}{a^4} + \frac{y_0^2}{b^4}}}.$$

После подстановки и упрощений получаем $\sin\alpha = \sin\beta$, поскольку углы α,β острые, следует $\alpha = \beta$. Свойство доказано.

Оптическое свойство гиперболы. Если источник света поместить в один фокус гиперболы, то отраженные от зеркала лучи будут казаться исходящими из второго фокуса. Геометрически, касательная в точке M гиперболы является биссектрисой угла F_2MF_1, образованного отрезками, соединяющими точку касания с фокусами. Это означает, что угол падения луча равен углу отражения. Потому что угол отражения и угол между касательной и отрезком MF_2 являются вертикальными углами.

Доказательство. Рассмотрим каноническое уравнение гипербол $L: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, уравнение касательной в точке $M\left(x_0; y_0\right)$, и координаты векторов $\overrightarrow{MF_1}$ и $\overrightarrow{MF_2}$: $l: \frac{Xx_0}{a^2} + \frac{Yy_0}{b^2} = 1$, $\overrightarrow{MF_1}\left(-c - x_0; -y_0\right)$, $\overrightarrow{MF_2}\left(c - x_0; -y_0\right)$.

Докажем равенство синусов углов между отрезками $\overrightarrow{MF_1}$ и $\overrightarrow{MF_2}$ и касательной или касательная, проведенная к гиперболе в точке $M\left(x_0; y_0\right)$ является биссектрисой угла F_2MF_1.

$$\sin\alpha = \frac{\rho\left(F_1, l\right)}{\left|MF_1\right|} = \frac{\rho\left(F_2, l\right)}{\left|MF_2\right|} = \sin\beta .$$

$$\sin\alpha = \frac{\rho\left(F_1, l\right)}{\left|MF_1\right|} = \frac{\left|\frac{-cx_0}{a^2} - 1\right|}{\sqrt{\frac{x_0^2}{a^4} + \frac{y_0^2}{b^4}}\sqrt{\left(-c - x_0\right)^2 + \left(-y_0\right)^2}} =$$

$$\frac{\left|\frac{cx_0}{a^2} + 1\right|}{\sqrt{\frac{x_0^2}{a^4} + \frac{y_0^2}{b^4}}\sqrt{\left(\frac{cx_0}{a} + a\right)^2}} = \frac{1}{a\sqrt{\frac{x_0^2}{a^4} + \frac{y_0^2}{b^4}}}.$$

$$\sin\beta = \frac{\rho\left(F_2, l\right)}{\left|MF_2\right|} = \frac{\left|\frac{cx_0}{a^2} - 1\right|}{\sqrt{\frac{x_0^2}{a^4} + \frac{y_0^2}{b^4}}\sqrt{\left(c - x_0\right)^2 + \left(-y_0\right)^2}} =$$

$$\frac{\left|\frac{cx_0}{a^2} - 1\right|}{\sqrt{\frac{x_0^2}{a^4} + \frac{y_0^2}{b^4}}\sqrt{\left(\frac{cx_0}{a} - a\right)^2}} = \frac{1}{a\sqrt{\frac{x_0^2}{a^4} + \frac{y_0^2}{b^4}}}.$$

После подстановки и упрощений получаем $\sin\alpha = \sin\beta$, поскольку углы α, β острые, следует $\alpha = \beta$. Свойство доказано.

Оптическое свойство параболы. Если источник света поместить в фокус параболы, то отраженные лучи будут направлены параллельно её оси симметрии.

Доказательство проводится аналогично доказательству оптического свойства эллипса.

Вопросы для самопроверки

1. Что называется коническими сечениями?
2. Докажите эквивалентность двух определений параболы.
3. Докажите эквивалентность определений эллипса и гиперболы через эксцентриситет и через фокальные свойства.
4. Выведите уравнение эллипса в полярных координатах.
5. Выведите уравнение параболы в полярных координатах.
6. Выведите уравнение гиперболы в полярных координатах.
7. Выведите уравнение касательной к эллипсу.
8. Выведите уравнение касательной к параболе.
9. Выведите уравнение касательной к гиперболе.
10. Докажите оптическое свойство эллипса.
11. Докажите оптическое свойство параболы.
12. Докажите оптическое свойство гиперболы.

ТЕМЫ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

1. Определение эллипса как ортогональной проекции окружности
2. Эллипс как сечение кругового цилиндра
3. Получение эллипса путем равномерного сжатия (растяжения) окружности вдоль координатной оси
4. Применение оптических свойств линий второго порядка в физике и технике
5. Применение фокальных свойств линий второго порядка в физике и технике.

ГЛОССАРИЙ (GLOSSARY)

Коническое сечение — сечение, полученное при пересечении кругового конуса плоскостью, не проходящей через его вершину. Если плоскость перпендикулярна оси конуса — получается окружность, если параллельна образующей конуса — парабола, если параллельна оси конуса — гипербола, в остальных случаях — эллипс.

Касательная к линии второго порядка — прямая неасимптотического направления, имеющая с линией второго порядка единственную общую точку.

Директриса эллипса (гиперболы), соответствующая фокусу — прямая, перпендикулярная фокальной оси, находящаяся на расстоянии от центра и расположенная с той же стороны от центра, что и фокус.