Предмет: Аналитическая геометрия и линейная алгебра

Лекция 1
Тема: ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА

§ 1. Понятие вектора. Операции сложения и умножения векторов на число и их свойства

1. Понятие вектора. Операции сложения и умножения на число

Определение 1.1. Отрезок ненулевой длины будем называть направленным, если указано, какая из ограничивающих его точек является первой и какая – второй. Первая точка называется началом, а вторая – концом, и направление от начала к концу указывается стрелкой (на рис. 1, A – начало, B – конец отрезка).

Определение 1.2. Векторами (иначе геометрическими векторами, или свободными векторами) называются направленные отрезки, для которых по правилам, указанным ниже, введены понятия равенства, нулевого и противоположного векторов, а также определены

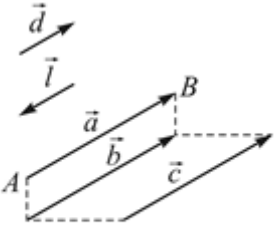


Рис. 1

операции сложения векторов и умножения векторов на действительные числа.

Вектор обозначается $\overrightarrow{AB}$ (A – начало, B – конец вектора) или $\vec{a}$ (см. рис. 1).

Из определения равенства векторов непосредственно вытекает следующее утверждение: каковы бы ни были вектор $\vec{a}$ и точка P, существует, и притом единственный, вектор $\overrightarrow{PQ}$ с началом в точке P, равный вектору $\vec{a}$.

В самом деле, существует лишь одна прямая, проходящая через точку P и параллельная той прямой, на которой лежит вектор $\vec{a}$. На указанной прямой существует единственная точка Q такая, что отрезок PQ имеет длину, равную длине вектора $\vec{a}$, и направлен в ту же сторону, что и вектор $\vec{a}$.

Иными словами, точка приложения данного вектора $\vec{a}$ может быть выбрана произвольно (мы не различаем двух равных векторов, имеющих разные точки приложения и получающихся один из другого параллельным переносом). В соответствии с этим векторы, изучаемые в геометрии, называют свободными (они определены с точностью до точки прило-

жения).

В механике и физике, кроме свободных векторов, иногда рассматривают скользящие и связанные векторы. Скользящими называют такие векторы, которые считаются эквивалентными, если они не только равны, но и лежат на одной прямой. Примером скользящего вектора может служить сила, приложенная к абсолютно твердому телу (известно, что две силы, равные и расположенные на одной прямой, оказывают на абсолютно твердое тело одинаковое механическое воздействие). Связанными называются такие векторы, которые считаются эквивалентными, если они не только равны, но и имеют общее начало. Примером связанного вектора может служить сила, приложенная к некоторой точке нетвердого (например, упругого) тела.

Два вектора называются одинаково направленными (противоположно направленными), если приведенные к общему началу, они располагаются на прямой и их концы принадлежат этой прямой и лежат по одну (по разные стороны) от начала. На рис. 1 $\vec{a}$ и $\vec{d}$ одинаково направлены, а $\vec{d}$ и $\vec{l}$ противоположно направлены.

Обозначения: $\vec{x}\uparrow\uparrow\vec{y}$, если $\vec{x}$ и $\vec{y}$ одинаково направлены; $\vec{x}\uparrow\downarrow\vec{y}$, если $\vec{x}$ и $\vec{y}$ противоположно направлены.

Длина направленного отрезка, изображающего вектор, называется длиной вектора (иначе, абсолютной величиной или модулем вектора). Модуль векторов $\vec{a}$, $\overrightarrow{AB}$ обозначается так: $|\vec{a}|$, $\left|\overrightarrow{AB}\right|$. При этом для любого вектора $\vec{x}$ действительное число $|\vec{x}|\geq 0$.

Нулевым вектором $\vec{0}$ называется вектор, у которого начало совпадает с концом. Очевидно, $\vec{x}=\vec{0}\Leftrightarrow|\vec{x}|=\vec{0}$.

Суммой двух векторов $\vec{x}$ и $\vec{y}$ называется вектор $\vec{x}+\vec{y}$, который получается из $\vec{x}$ и $\vec{y}$ (или им равных) по следующему правилу (рис. 2): от произвольной точки O откладывают вектор $\vec{x}$, от конца A отложенного вектора откладывают вектор $\vec{y}$, если B есть конец вектора $\vec{y}$, то $\vec{x}+\vec{y}=\overrightarrow{OB}$. Указанный способ построения суммы называется правилом треугольника. Сумма не зависит от выбора начальной точки O.

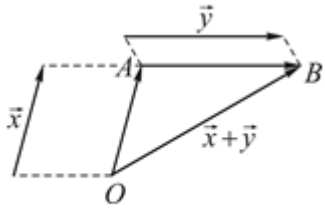


Рис. 2

Вектор $(-\vec{x})$ называется противоположным к $\vec{x}$, если они имеют одинаковую длину и противоположно направлены, т.е. $|-\vec{x}|=|\vec{x}|$ и $(-\vec{x})\downarrow\uparrow\vec{x}$.

Произведением вектора $\vec{x} \neq 0$ на действительное число $\lambda \neq 0 \quad (\lambda \in R)$ называется вектор $\lambda \vec{x} = \vec{x}\lambda$, удовлетворяющий следующим условиям:

а) $|\lambda \vec{x}| = |\lambda||\vec{x}|$;

б) при $\lambda > 0 \quad (\lambda \vec{x}) \uparrow\uparrow \vec{x}$, при $\lambda < 0 \quad (\lambda \vec{x}) \uparrow\downarrow \vec{x}$.

Если $\vec{x} = \vec{0}$ или $\lambda = 0$, то $\lambda \vec{x} = \vec{0}$.

2. Основные свойства сложения векторов и умножения их на число

Теорема 1.1 (основные свойства). Пусть $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$ – любые векторы, а λ и μ – любые числа, λ и $\mu \in \boldsymbol{R}$. Тогда

$$\vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x} \ - \text{(коммутативность)}; \qquad (1.1)$$

$$\vec{x} + (\vec{y} + \vec{z}) = (\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z} \ - \text{(ассоциативность)}; \qquad (1.2)$$

Существует $\vec{0}$ (нуль вектор) для каждого вектора $\vec{x}$ выполняется

$$\vec{x} + \vec{0} = \vec{x} \qquad (1.3)$$

Для каждого вектора $\vec{x}$ существует вектор $(-\vec{x})$ – противоположный:

$$\vec{x} + (-\vec{x}) = \vec{0}; \qquad (1.4)$$

$$\vec{x} = 1 \cdot \vec{x}; \qquad (1.5)$$

Для каждого вектора $\vec{x}$ и для всех λ, $\mu \in \boldsymbol{R}$:

$$\lambda(\mu \vec{x}) = (\lambda \mu)\vec{x} \qquad (1.6)$$

Для каждого вектора $\vec{x}$ и для всех λ, $\mu \in \boldsymbol{R}$:

$$(\lambda + \mu)\vec{x} = \lambda \vec{x} + \mu \vec{x}; \qquad (1.7)$$

Для произвольных векторов $\vec{x}$, $\vec{y}$ и для всех $\lambda \in \boldsymbol{R}$:

$$\lambda(\vec{x} + \vec{y}) = \lambda \vec{x} + \lambda \vec{y}. \qquad (1.8)$$

Для доказательства свойства (1.1). Приложим два

произвольных вектора $\vec{x}$ и $\vec{y}$ к общему началу O (рис. 3). Обозначим буквами A и C концы векторов $\vec{x}$ и $\vec{y}$ соответственно и рассмотрим параллелограмм $OBCA$. Из определения равенства векторов следует, что $BC = OA = \vec{x}, \quad AC = OB = \vec{y}$.

Из определения суммой двух векторов и из рассмотрения треугольника OAC следует, что диагональ OC указанного параллелограмма представляет собой сумму векторов $\vec{x} + \vec{y}$, а из рассмотрения треугольника OBC следует, что та же самая диагональ OC представляет собой сумму векторов $\vec{y} + \vec{x}$. Тем самым свойство (1.1) установлено.

Доказательство свойство (1.2). Для этого приложим вектор $\vec{x}$ к произвольной точке O, вектор $\vec{y}$ к концу вектора $\vec{x}$ и вектор $\vec{z}$ к концу вектора $\vec{y}$

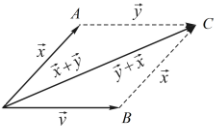


Рис. 3

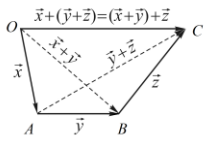


Рис. 4а

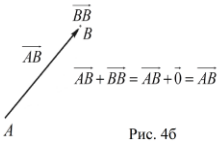


Рис. 4б

(рис. 4а). Обозначим буквами A, B и C концы векторов $\vec{x}$, $\vec{y}$ и $\vec{z}$ соответственно. Тогда

$$\vec{x}+(\vec{y}+\vec{z})=\overrightarrow{OA}+\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right)=\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}\right)+\overrightarrow{BC}=\left(\vec{x}+\vec{y}\right)+\vec{z}$$

т.е. свойство (1.2) доказано.

Доказательство свойство (1.3). Для этого приложим вектор $\vec{x}$ к произвольной точке A, конец вектора обозначим через B тогда получим $\vec{x}=\overrightarrow{AB}$, приложим нулевой вектор к точке B, т.е. его начало к концу вектора $\vec{x}$ и обозначим нулевой вектор через $\overrightarrow{BB}$.

Тогда $\vec{x}+\vec{0}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BB}=\overrightarrow{AB}=\vec{x}$. Свойство (1.3) доказано (рис. 4б).

Для доказательства свойства (1.4) определим вектор $-\vec{x}$, противоположный вектору $\vec{x}$, как вектор, коллинеарный вектору $\vec{x}$, имеющий одинаковую с вектором $\vec{x}$ длину и противоположное направление (Для получения $-\vec{x}$ достаточно поменять местами начало и конец вектора $\vec{x}$). Очевидно, что взятая, согласно определению суммой двух векторов, сумма вектора $\vec{x}$ с таким вектором $-\vec{x}$ дает нулевой вектор.

Доказательство свойство (1.5) следует из второго условия произведении векторов на действительного число при случае $\lambda=1$.

Термин «растяжение» следует понимать в указанном выше условном смысле. Рисунок 5 отвечает случаю $\lambda>1$.

Свойство (1.6) в тех же терминах означает, что при «растяжении» вектора $\vec{x}$ сначала в λ раз, а потом еще в μ раз получается такой же вектор, как и при «растяжении» вектора $\vec{x}$ сразу в $\lambda\mu$ раз.

С учетом оговоренной выше условности термина условности термина «растяжение» свойство (1.7) означает, что при «растяжении» вектора $\vec{x}$ в $(\lambda+\mu)$ раз получается такой же вектор, как при сложении вектора $\vec{x}$, «растянутого» в λ раз, с вектором $\vec{x}$, «растянутым» в μ раз.

Для доказательства свойства (1.8) приложим векторы $\vec{x}$ и $\vec{y}$ к общему началу O и построим на них параллелограмм, диагональ которого будет представлять собой сумму $\vec{x}+\vec{y}$ (рис. 5). При «растяжении» сторон этого параллелограмма в λ раз в силу свойства подобия диагональ также «растягивается» в λ раз, но это и означает, что сумма $\lambda\vec{x}+\lambda\vec{y}$

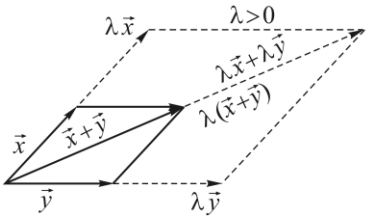


Рис. 5

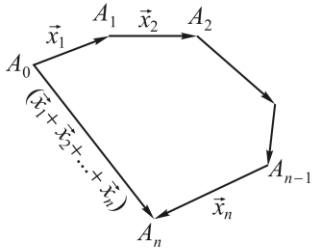


Рис. 6

равна $\lambda(\vec{x}+\vec{y})$.

Следствие 1.1: $(-\vec{x})=(-1)\vec{x}$;

Следствие 1.2: $\overrightarrow{A_0A_1}+\overrightarrow{A_1A_2}+\ldots+\overrightarrow{A_{n-1}A_n}=\overrightarrow{A_0A_n}$ (рис. 6);

Следствие 1.3: сложение векторов определяется по правилу параллелограмма (см. рис. 3).

Разностью векторов $\vec{x}$ и $\vec{y}$ называется вектор $\vec{x}+(-\vec{y})$, который обозначается как $\vec{x}-\vec{y}$.

Отметим, что $\vec{z}=\vec{x}-\vec{y}\Leftrightarrow\vec{z}+\vec{y}=\vec{x}$. Геометрически $\vec{x}-\vec{y}$ получается из $\vec{x}$ и $\vec{y}$ (или им равных), как указано на рис. 7.

Рис. 7

Замечание 1.1. У векторов, которые рассматриваем, начальные точки выбраны произвольно (т.е. не различаем равные вектора, получающиеся друг из друга параллельным переносом). Такие векторы иногда называют «скользящими» векторами. (Они определены с точностью до точки приложения при параллельном «скольжении».) Часто в физике, механике и т.д. рассматривают «связные» векторы, т.е.

векторы, общая начальная точка приложения для которых фиксирована.

Пример. 1.1. По данным векторам $\vec{x}$ и $\vec{y}$ построить вектор $-\vec{y}-\vec{x}$**.**

Решение. Векторы $\vec{x}$ и $\vec{y}$ приложим к точке O. Построим вектора $-\vec{x}$ и $-\vec{y}$ противоположные к векторам $\vec{x}$ и $\vec{y}$, соответственно. Складывая вектора $-\vec{y}$ и $-\vec{x}$ по правилу треугольника, получим вектор $-\vec{y}-\vec{x}$.

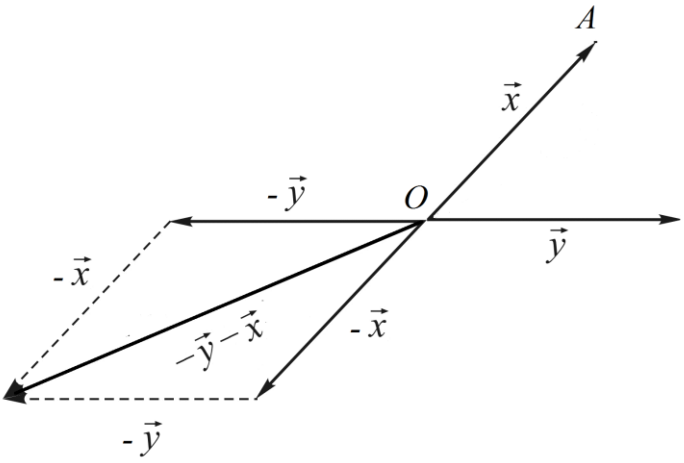


Рис. 8

Пример 1.2. В треугольнике ABC проведена биссектриса AD угла А. Выразить вектор $\overrightarrow{AD}$ через векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$.

Решение. Используя свойства биссектрисы треугольника ABC, имеем соотношение $\frac{CD}{DB}=\frac{AC}{AB}$.

Отсюда следует, что

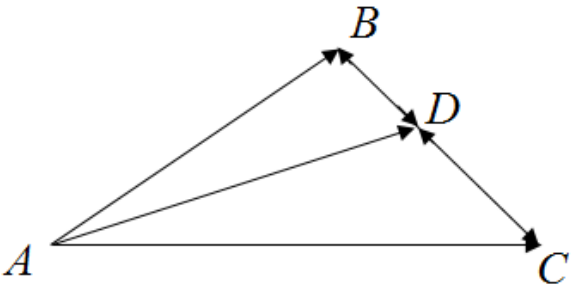
$$\overrightarrow{CD}=\frac{\left|\overrightarrow{AC}\right|}{\left|\overrightarrow{AB}\right|}\cdot\overrightarrow{DB}. \qquad (*)$$

Из треугольников ABD и ADC имеем

$$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD} \text{ и } \overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}. \qquad (**)$$

Приравнивая правые части равенств (**) и учитывая соотношение (*) получаем

$$\overrightarrow{AC}-\frac{\left|\overrightarrow{AC}\right|}{\left|\overrightarrow{AB}\right|}\cdot\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}.$$



Следовательно, $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BD}\left(1+\frac{\left|\overrightarrow{AC}\right|}{\left|\overrightarrow{AB}\right|}\right)$.

Из этого равенства найдем выражение

$$\overrightarrow{BD} = \frac{\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}}{\left|\overrightarrow{AC}\right| + \left|\overrightarrow{AB}\right|} \cdot \left|\overrightarrow{AB}\right|$$

Используя найденные соотношения, получим

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB} + \frac{\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}}{\left|\overrightarrow{AC}\right| + \left|\overrightarrow{AB}\right|} \cdot \left|\overrightarrow{AB}\right| = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \left|\overrightarrow{AC}\right| + \overrightarrow{AC} \cdot \left|\overrightarrow{AB}\right|}{\left|\overrightarrow{AC}\right| + \left|\overrightarrow{AB}\right|}.$$

Значит,

$$\overrightarrow{AD} = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \left|\overrightarrow{AC}\right| + \overrightarrow{AC} \cdot \left|\overrightarrow{AB}\right|}{\left|\overrightarrow{AC}\right| + \left|\overrightarrow{AB}\right|}.$$

Определение 1.3. Множество V называется линейным пространством свободных векторов (ЛПСВ), если:

1) для всех $\vec{x}$, $\vec{y} \in V$ определен элемент $\vec{x} + \vec{y} \in V$, называемый суммой векторов $\vec{x}$ и $\vec{y}$;

2) для всех $\vec{x} \in V$ и всех $\lambda \in \boldsymbol{R}$ определен $\lambda\vec{x} \in V$, называемый произведением вектора $\vec{x}$ на число λ;

3) для всех $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z} \in V$ и всех λ, $\mu \in \boldsymbol{R}$ в множестве V выполняются свойства (1.1)–(1.8).

Укажем примеры линейных пространств свободных векторов.

Пример 1.3. Подмножество V_0, состоящее из одного нулевого вектора, очевидно, является ЛПСВ.

Пример 1.4. Подмножество V_1 всех свободных векторов, параллельных некоторой прямой, является ЛПСВ.

Пример 1.5. Подмножество V_2 всех свободных векторов, параллельных некоторой плоскости, является ЛПСВ.

Пример 1.6. Множество V_3 всех свободных векторов в пространстве, очевидно, является ЛПСВ.

Укажем примеры множеств векторов, по той или иной причине не являющихся ЛПСВ.

Пример 1.7. Множество всех свободных векторов пространства за исключением векторов параллельных некоторой фиксированной прямой l (так как в пределах этого множества нельзя складывать векторы, симметричные относительно указанной прямой).

Пример 1.8. Множество $\boldsymbol{X}$ всех векторов пространства, имеющих общее начало, концы которых лежат на фиксированной прямой l, не проходящей через начало координат (так как нулевой вектор не принадлежит множеству $\boldsymbol{X}$).

Задачи к лекции 1

1. Векторы $\overrightarrow{AC} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{BD} = \vec{b}$ служат диагоналями параллелограмма $ABCD$. Выразить через векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$ и $\overrightarrow{DA}$, являющиеся сторонами этого параллелограмма.
2. Точки K и L служат серединами сторон BC и CD параллелограмма $ABCD$. Полагая $\overrightarrow{AK} = \vec{k}$ и

$\overrightarrow{AL} = \vec{l}$, выразить через векторы $\vec{k}$ и $\vec{l}$ векторы $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{CD}$.

3. В треугольнике ABC проведена медиана AD. Выразить вектор $\overrightarrow{AD}$ через векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$.
4. В треугольнике ABC проведены медианы AD, BE и CF. Найти сумму векторов $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF}$.
5. Точки E и F служат серединами сторон AB и CD четырехугольника $ABCD$. Доказать, что $\overrightarrow{EF} = \dfrac{\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD}}{2}$. Вывести отсюда теорему о средней линии трапеции.
6. Доказать, что сумма векторов, идущих из центра правильного многоугольника к его вершинам, равна 0.
7. Доказать, что вектор, идущий из произвольной точки плоскости в центр правильного многоугольника, есть среднее арифметическое векторов, идущих из этой точки к вершинам многоугольника.
8. В треугольнике найти такую точку, чтобы сумма векторов, идущих из этой точки к вершинам треугольника, была равна 0.
9. Тот же вопрос для параллелограмма.

10. В четырехугольнике $ABCD$ (плоском или пространственном) положим $\overrightarrow{AB}=\vec{m},\ \overrightarrow{BC}=\vec{n},\ \overrightarrow{CD}=\vec{p},\ \overrightarrow{DA}=\vec{q}$. Найти вектор $\overrightarrow{EF}$, соединяющий середины диагоналей AC и BD.

Литература

1. Ильин В.А, Позняк Э.Г. Аналитическая геометрия: Учебник для вузов. 7-е изд., М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. -224с.
2. Сандаков Е.Б. Основы аналитической геометрии и линейной алгебры. Учебное пособие, М.: МИФИ, 2005. – 308 с.
3. Бахвалов С.В., Моденов П.С., Пархоменко А.С. Сборник задач по аналитической геометрии. М.: 1964 г., 440 с.