

ПРЕДМЕТ: Аналитическая геометрия и линейная алгебра

Лекция 2

Тема: ЛИНЕЙНАЯ ЗАВИСИМОСТЬ И НЕЗАВИСИМОСТЬ ВЕКТОРОВ

§ 1. Теоремы разложения.

Линейная зависимость и независимость векторов

1. Коллинеарные и компланарные векторы.
Теоремы разложения векторов

Определение 1.4. Векторы $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, \dots$ называются коллинеарными (обозначаем $\vec{x} \parallel \vec{y}$), если все они параллельны одной прямой. Векторы $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, \dots$ называются компланарными, если все они параллельны одной плоскости.

Из определения следуют следующие очевидные утверждения:

- 1) нулевой вектор коллинеарен любому вектору;
 - 2) каждый вектор $\vec{x}$ коллинеарен самому себе;
 - 3) если $\vec{x} \parallel \vec{y}$, то и $\vec{y} \parallel \vec{x}$;
 - 4) если $\vec{x} \parallel \vec{y}$ и $\vec{y} \parallel \vec{z}$, то $\vec{x} \parallel \vec{z}$;
 - 5) если несколько векторов коллинеарны между собой, то они и подавно компланарны между собой;
 - 6) любые два вектора компланарны между собой.
- Имеют место следующие важные теоремы.

Теорема 1.2 (о разложении). Для любого вектора $\vec{a}$, коллинеарного любому вектору $\vec{l}_1 \neq \vec{0}$, существует единственное действительное число $\lambda_1 \in \mathbf{R}$, такое что имеет место равенство $\vec{a} = \lambda_1 \vec{l}_1$.

Теорема 1.3. Для любого вектора $\vec{a}$, компланарного любым двум неколлинеарным векторам $\vec{l}_1$ и $\vec{l}_2$, существуют единственные действительные числа $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{R}$, такие что вектор $\vec{a}$ имеет разложение $\vec{a} = \lambda_1 \vec{l}_1 + \lambda_2 \vec{l}_2$.

Теорема 1.4. Для любого вектора $\vec{a}$ и любых трех некопланарных векторов $\vec{l}_1, \vec{l}_2, \vec{l}_3$, существуют единственные числа $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbf{R}$: такие что вектор $\vec{a}$ можно представить в виде $\vec{a} = \lambda_1 \vec{l}_1 + \lambda_2 \vec{l}_2 + \lambda_3 \vec{l}_3$.

Доказательство теоремы 1.2. Предполагая для любого вектора $\vec{a}$ существование представления $\vec{a} = \lambda_1 \vec{l}_1$ (где $\vec{l}_1 \neq \vec{0}$), покажем его единственность.

Пусть существует еще одно представление $\vec{a} = \lambda'_1 \vec{l}_1$.

Вычитая одно представление из другого, получаем $(\lambda_1 - \lambda'_1) \vec{l}_1 = \vec{0}$. Так как $\vec{l}_1 \neq \vec{0}$, то $\lambda_1 = \lambda'_1$. Тем самым единственность представления доказана. Далее, если $\vec{l}_1$ и $\vec{a} \neq \vec{0}$ одинаково направлены, то этим единственным числом, как следует из определения умножения вектора на число, является число $\lambda_1 = \frac{|\vec{a}|}{|\vec{l}_1|}$ (рис. 8). Если

же $\vec{l}_1$ и $\vec{a}$ противоположно направлены, то этим единственным числом по той же причине является

число $\lambda_1 = -\frac{|\vec{a}|}{|\vec{l}_1|}$. Если же $\vec{a} = \vec{0}$, то этим единственным

числом является $\lambda_1 = 0$.

Доказательство теоремы 1.3. Пусть вектор коллинеарен одному из векторов $\vec{l}_1$ или $\vec{l}_2$. Не ограничивая общности можно предполагать, вектор $\vec{a}$ коллинеарен вектору $\vec{l}_1$. Тогда из теоремы 1.2 вытекает, что имеет места единственное разложение $\vec{a} = \lambda_1 \vec{l}_1$. Значит, вектор $\vec{a}$ имеет единственное разложение $\vec{a} = \lambda_1 \vec{l}_1 + 0 \cdot \vec{l}_2$.

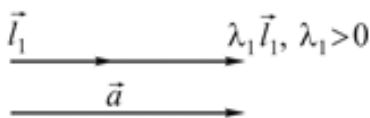


Рис. 8

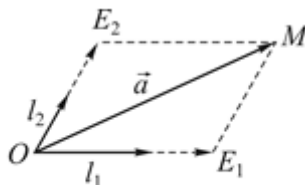


Рис. 9

Отсюда следует доказательство теоремы 1.3. Пусть теперь $\vec{a}$ не коллинеарен ни одному из векторов $\vec{l}_1$ и $\vec{l}_2$. Приведем векторы $\vec{a}$, $\vec{l}_1$, $\vec{l}_2$ к общему началу O . Проведем через точку M (конец вектора $\vec{a}$) прямые, параллельные векторам $\vec{l}_1$ и $\vec{l}_2$. Обозначим через E_1 и E_2 точки пересечения указанных прямых с прямыми, на которых лежат векторы $\vec{l}_1$ и $\vec{l}_2$ (рис. 9) соответственно (Существование точек E_1 и E_2 следует из неколлинеарности векторов $\vec{l}_1$ и $\vec{l}_2$). В силу правила параллелограмма сложения векторов получим $\vec{a} = \vec{OE}_1 + \vec{OE}_2$.

Из теоремы 1.2 следует, что существует $\lambda_1 \in \mathbf{R}$: $\overrightarrow{OE_1} = \lambda_1 \vec{l}_1$ и существует $\lambda_2 \in \mathbf{R}$: $\overrightarrow{OE_2} = \lambda_2 \vec{l}_2$. Таким образом, получим:

$$\vec{a} = \lambda_1 \vec{l}_1 + \lambda_2 \vec{l}_2.$$

Покажем единственность этого представления. Для этого предположим, что существует еще другое представление:

$$\vec{a} = \lambda'_1 \vec{l}_1 + \lambda'_2 \vec{l}_2$$

(для определенности предположим, что $\lambda_1 \neq \lambda'_1$). Вычитая из одного представления другое, получаем $(\lambda_1 - \lambda'_1) \vec{l}_1 = (\lambda_2 - \lambda'_2) \vec{l}_2$ или (так как $\lambda_1 - \lambda'_1 \neq 0$) $\vec{l}_1 = \frac{\lambda'_2 - \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda'_1} \vec{l}_2$.

Следовательно, согласно определению умножения вектора на число получаем $\vec{l}_1 \parallel \vec{l}_2$, что противоречит условию теоремы. Полученное противоречие и доказывает единственность представления.

Доказательство теоремы 1.4. Если вектор $\vec{a}$ компланарен каким-нибудь двум векторам из тройки $\vec{l}_1, \vec{l}_2, \vec{l}_3$, то из теоремы 1.3 вытекает теорема 1.4. Пусть теперь $\vec{a}$ некомпланарен ни с какой парой векторов из тройки $\vec{l}_1, \vec{l}_2, \vec{l}_3$. Приведем векторы $\vec{a}, \vec{l}_1, \vec{l}_2, \vec{l}_3$ к общему началу O (рис. 10) и проведем через точку M (конец вектора $\vec{a}$) плоскости, параллельные плоскостям, определяемым парами векторов $\vec{l}_1 \vec{l}_2, \vec{l}_1 \vec{l}_3$ и $\vec{l}_2 \vec{l}_3$. Точки пересечения указанных плоскостей с прямыми, на которых лежат векторы $\vec{l}_1, \vec{l}_2, \vec{l}_3$, обозначим соответственно через E_1, E_2, E_3 (существование точек E_1, E_2, E_3 вытекает из того, что векторы $\vec{l}_1, \vec{l}_2, \vec{l}_3$, не-

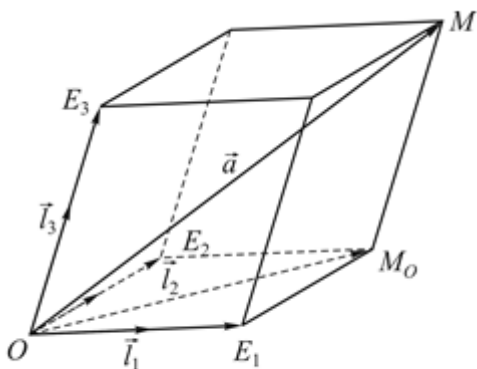


Рис. 10

компланарны). В силу правила параллелограмма сложения векторов имеем $\vec{a} = \vec{OE}_3 + \vec{OM}_O$. Из теоремы 1.2 следует, что существует $\lambda_3 \in \mathbf{R}$: $\vec{OE}_3 = \lambda_3 \vec{i}_3$, а из теоремы 1.3 следует, что существуют числа λ_1 , $\lambda_2 \in \mathbf{R}$:

$\vec{OM}_O = \lambda_1 \vec{i}_1 + \lambda_2 \vec{i}_2$. Следовательно, получаем $\vec{a} = \lambda_1 \vec{i}_1 + \lambda_2 \vec{i}_2 + \lambda_3 \vec{i}_3$. Покажем единственность этого представления. Для этого предположим, что существует еще другое представление $\vec{a} = \lambda'_1 \vec{i}_1 + \lambda'_2 \vec{i}_2 + \lambda'_3 \vec{i}_3$ (для определенности предположим, что $\lambda_1 \neq \lambda'_1$). Вычитая из одного представления другое, получаем

$$(\lambda_1 - \lambda'_1) \vec{i}_1 = (\lambda'_2 - \lambda_2) \vec{i}_2 + (\lambda'_3 - \lambda_3) \vec{i}_3.$$

Так как $\lambda_1 \neq \lambda'_1$ то $\vec{i}_1 = \frac{\lambda'_2 - \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda'_1} \vec{i}_2 + \frac{\lambda'_3 - \lambda_3}{\lambda_1 - \lambda'_1} \vec{i}_3$.

Отсюда в силу правила сложения двух векторов следует, что $\vec{i}_1$ лежит в плоскости, определяемой векторами $\vec{i}_2, \vec{i}_3$. Следовательно, векторы $\vec{i}_1, \vec{i}_2, \vec{i}_3$ компланарны, что противоречит условию теоремы. Полученное противоречие и доказывает единственность представления. #

2. Линейная зависимость и независимость векторов

Рассмотрим линейное пространство свободных векторов V (например, V_m , где $m = 1, 2, 3$ – фиксированное).

Определение 1.5. Линейной комбинацией k векторов $a_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k$ будем называть сумму произведений этих векторов на произвольные вещественные числа, т.е. выражение вида

$$\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \dots + \alpha_k \vec{a}_k,$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ – произвольные вещественные числа.

Определение 1.6. Векторы $a_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k$ из V называются линейно независимыми в V , если для любых $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in \mathbf{R}$ из равенства

$$\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \dots + \alpha_k \vec{a}_k = \vec{0}$$

следует $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_k = 0$.

Векторы $a_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k$ из V называются линейно зависимыми в V , если найдутся такие вещественные числа $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in \mathbf{R}$ не все одновременно равные нулю ($|\alpha_1| + |\alpha_2| + \dots + |\alpha_k| \neq 0$), такие, что линейная комбинация векторов с указанными числами обращается в нуль, т.е.

$$\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \dots + \alpha_k \vec{a}_k = \vec{0}.$$

Определение 1.7. Если для векторов и существуют числа $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k \in \mathbf{R}$, такое что вектор $\vec{a}$ можно

написать вида

$$\vec{a} = \beta_1 \vec{a}_1 + \beta_2 \vec{a}_2 + \dots + \beta_k \vec{a}_k,$$

то говорят, что вектор $\vec{a}$, есть линейная комбинация векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k$ из V .

Теорема 1.5. Если хотя бы один из векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ является нулевым, то эти векторы являются линейно зависимыми.

Доказательство. Не ограничивая общности, будем предполагать вектор $\vec{a}_1$ является нулевым (мы всегда можем поменять порядок следования векторов так, чтобы нулевым оказался первый из векторов). Тогда линейная комбинация $\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \dots + \alpha_n \vec{a}_n$ обращается в нуль при $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$, одно из которых отлично от нуля. Значит, $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ система линейна зависима.

Теорема 1.6. Если среди n векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ какие-либо k ($1 \leq k < n$) векторов линейно зависимы, то все n векторов линейно зависимы.

Доказательство. Не ограничивая общности, будем предполагать векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k$ линейно зависимы (поменяв порядок следования векторов, мы всегда можем добиться того, чтобы линейно зависимыми оказались первые k векторов), а векторы $\vec{a}_{k+1}, \vec{a}_{k+2}, \dots, \vec{a}_n$ произвольные. По определению линейной зависимости найдутся такие вещественные числа $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$, из которых хотя бы одно отлично от нуля, что имеет место равенство

$$\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \dots + \alpha_k \vec{a}_k = \vec{0}. \quad (*)$$

Равенство (*) сохранится, если мы добавим в левую часть этого равенства равную нулю слагаемые $0 \cdot \vec{a}_{k+1} + 0 \cdot \vec{a}_{k+2} + \dots + 0 \cdot \vec{a}_n$, т.е. справедливо равенство

$$\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \dots + \alpha_k \vec{a}_k + 0 \cdot \vec{a}_{k+1} + 0 \cdot \vec{a}_{k+2} + \dots + 0 \cdot \vec{a}_n = \vec{0}. \quad (**)$$

Так как среди чисел $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k, 0, \dots, 0$ хотя бы одно отлично от нуля, то равенство (**) доказывает линейную зависимость векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$. #

Теорема 1.7 (критерий линейной зависимости). Векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k$ из V линейно зависимы в V тогда и только тогда один из них есть линейная комбинация остальных.

Доказательство. Необходимость. Пусть $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k$ линейно зависимы. Тогда существуют такие действительные числа $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in \mathbf{R}$, хотя бы одно из них отлично от нуля ($|\alpha_1| + |\alpha_2| + \dots + |\alpha_k| \neq 0$, без ограничения общности можно считать $\alpha_1 \neq 0$), такие, что

$$\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \dots + \alpha_k \vec{a}_k = \vec{0},$$

$$\text{или } \vec{a}_1 = \beta_1 \vec{a}_1 + \beta_2 \vec{a}_2 + \dots + \beta_k \vec{a}_k, \text{ где } \beta_2 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1}, \dots, \beta_k = -\frac{\alpha_k}{\alpha_1}.$$

Достаточность. Пусть, например (без ограничения общности), $\vec{a}_1$ является линейной комбинацией остальных, т.е.

$$\vec{a}_1 = \beta_2 \vec{a}_2 + \dots + \beta_k \vec{a}_k.$$

Тогда $(-1) \vec{a}_1 + \beta_2 \vec{a}_2 + \dots + \beta_k \vec{a}_k = \vec{0}$, где $\alpha_1 = (-1) \neq 0$, $\alpha_2 = \beta_2, \dots, \alpha_k = \beta_k$, т.е. $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k$ линейно зависимы в V . #

Из определений, теоремы разложения и критерия линейной зависимости получаем:

Вывод 1. Линейно зависимыми векторами в V_1 – «прямой», V_2 – «плоскости», V_3 – «пространстве» являются соответственно: в V_1 – нулевой вектор $\vec{0}$, в V_2 – любые два коллинеарных вектора, в V_3 – любые три компланарных вектора.

2. Линейно независимыми векторами в V_1, V_2, V_3 соответственно являются: в V_1 – любой ненулевой вектор, в V_2 – любые два неколлинеарных вектора, в V_3 – любые три некомпланарных вектора.

3. В V_m ($m = 1, 2, 3$) существует m линейно независимых векторов, причем любые $(m + 1)$ векторов линейно зависимы в V_m .

§ 2. Базис и размерность линейного пространства свободных векторов. Координаты вектора в данном базисе

1. Основные определения

Пусть V – линейное пространство свободных векторов (например, V_m , где $m = 1, 2, 3$ фиксированное).

Определение 1.8. Векторы $\vec{l}_1, \vec{l}_2, \dots, \vec{l}_n$ из V называются базисом V , если $\vec{l}_1, \vec{l}_2, \dots, \vec{l}_n$ – линейно независимы в V и для любого вектора $\vec{x} \in V$, существуют действительные числа $x_1, \dots, x_n \in \mathbf{R}$ такие что, вектор $\vec{x}$ можно разложить как линейную комбинацию $\vec{l}_1, \vec{l}_2, \dots, \vec{l}_n$, т.е.

$$\vec{x} = x_1 \vec{l}_1 + x_2 \vec{l}_2 + \dots + x_n \vec{l}_n.$$

Указанное равенство называется разложением вектора $\vec{x} \in V$ по базису $\vec{l}_1, \vec{l}_2, \dots, \vec{l}_n$ из V .

Лемма 1.1. Для любого вектора $\vec{x} \in V$ разложение его по базису $\vec{l}_1, \vec{l}_2, \dots, \vec{l}_n$ из V единственно.

Доказательство. Если предположить, что существует еще одно разложение $\vec{x} = x'_1 \vec{l}_1 + \dots + x'_n \vec{l}_n$, тогда $\vec{0} = \vec{x} - \vec{x} = (x_1 - x'_1) \vec{l}_1 + \dots + (x_n - x'_n) \vec{l}_n$.

В силу линейной независимости векторов $\vec{l}_1, \vec{l}_2, \dots, \vec{l}_n$ имеем $x_1 - x'_1 = 0, \dots, x_n - x'_n = 0$, т.е. $x_1 = x'_1, \dots, x_n = x'_n$. #

Определение 1.9. Числа $x_1, \dots, x_n$ в разложении $\vec{x} = x'_1 \vec{l}_1 + \dots + x_n \vec{l}_n$ вектора $\vec{x} \in V$ по базису $\vec{l}_1, \vec{l}_2, \dots, \vec{l}_n$ из V называют координатами вектора $\vec{x}$ относительно базиса $\vec{l}_1, \vec{l}_2, \dots, \vec{l}_n$ из V . Число n -базисных векторов называют размерностью V , обозначают $\dim V = n$.

Из результатов предыдущего параграфа следует.

Вывод 1.2. Пусть V_1, V_2, V_3 — линейное пространство свободных векторов, расположенных соответственно на «заданной прямой», «заданной плоскости», в «пространстве». Тогда

- 1) любой ненулевой вектор $\vec{l}_1 \neq 0, \vec{l}_1 \in V_1$ образует базис $V_1, \dim V_1 = 1$;
- 2) любые два неколлинеарных вектора $\vec{l}_1, \vec{l}_2 \in V_2$ образуют базис $V_2, \dim V_2 = 2$;
- 3) любые три некомпланарных вектора $\vec{l}_1, \vec{l}_2, \vec{l}_3 \in V_3$ образуют базис $V_3, \dim V_3 = 3$;

Замечание 1.2. Из вывода следует, что «заданная прямая» одномерна, «заданная плоскость» двумерна, «пространство» в обычном понимании трехмерно.

Определение 1.10. Базис $\vec{l}_1, \vec{l}_2, \dots, \vec{l}_n$ из V называется ортонормированным базисом (ОНБ), если векторы $\vec{l}_1, \vec{l}_2, \dots, \vec{l}_n$ попарно ортогональны (перпендикулярны) и по модулю равны единице. Если базис произвольный, то он называется косоугольным или аффинным.

2. Координатная запись сложения векторов и умножения вектора на число

Все рассуждения приведем в линейном пространстве свободных векторов V_3 (для V_1, V_2 все рассуждения проводятся аналогично).

Пусть $\vec{l}_1, \vec{l}_2, \vec{l}_3$ – базис V_3 . Тогда для $\forall \vec{x}, \vec{y} \in V_3$ имеем единственное разложение по базису:

$$\vec{x} = x_1 \vec{l}_1 + x_2 \vec{l}_2 + x_3 \vec{l}_3, \quad \vec{y} = y_1 \vec{l}_1 + y_2 \vec{l}_2 + y_3 \vec{l}_3$$

или кратко

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^3 x_i \vec{l}_i, \quad \vec{y} = \sum_{i=1}^3 y_i \vec{l}_i.$$

Из свойств сложения векторов и умножения вектора на вещественное число имеем

$$\begin{aligned} \vec{x} + \vec{y} &= (x_1 \vec{l}_1 + x_2 \vec{l}_2 + x_3 \vec{l}_3) + (y_1 \vec{l}_1 + y_2 \vec{l}_2 + y_3 \vec{l}_3) = \\ &= (x_1 + y_1) \vec{l}_1 + (x_2 + y_2) \vec{l}_2 + (x_3 + y_3) \vec{l}_3. \end{aligned}$$

или кратко

$$\vec{x} + \vec{y} = \sum_{j=1}^3 x_j \vec{l}_j + \sum_{j=1}^3 y_j \vec{l}_j = \sum_{j=1}^3 (x_j + y_j) \vec{l}_j.$$

Аналогично, для $\forall \lambda \in \mathbf{R}$

$$\lambda \vec{x} = \lambda(x_1 \vec{l}_1 + x_2 \vec{l}_2 + x_3 \vec{l}_3) = (\lambda x_1) \vec{l}_1 + (\lambda x_2) \vec{l}_2 + (\lambda x_3) \vec{l}_3.$$

или кратко

$$\lambda \vec{x} = \lambda \sum_{j=1}^3 x_j \vec{l}_j = \sum_{j=1}^3 (\lambda x_j) \vec{l}_j.$$

Итак, в силу единственности разложения по базису, получаем следующее

правило 1.1: при сложении любых векторов линейного пространства свободных векторов V их координаты относительно любого базиса V складываются, а при умножении вектора на любое число $\lambda \in \mathbf{R}$ все координаты этого вектора умножаются на число λ .

3. Аффинные и декартовые системы координат

Определение 1.11. Аффинной системой координат в пространстве V_m (m – фиксировано, $m = 1, 2, 3$) называется совокупность m базисных векторов, отнесенных к общему началу O (O – называется началом координат).

Прямые, проходящие через начало координат в направлении базисных векторов, называются осями координат. (В пространстве V_3 первая ось называется осью абсцисс, вторая – осью ординат, третья – осью аппликат). Плоскости (в V_3), проходящие через оси координат, называются координатными плоскостями.

Определение 1.12. Декартовая прямоугольная система координат в V_m ($m = 1, 2, 3$) есть совокупность ОНБ и начала координат.

Замечание 1.3. В случае декартовой прямоугольной системы координат в V_3 базисные векторы единичной длины $\vec{l}_1, \vec{l}_2, \vec{l}_3$ принято обозначать буквами $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ (в V_2 соответственно буквами $\vec{i}, \vec{j}$).

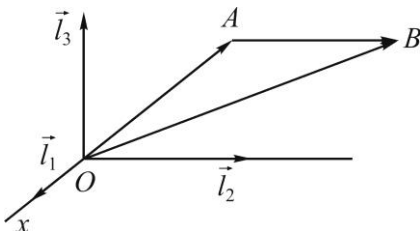


Рис. 11

Определение 1.13.

Аффинными (декартовыми прямоугольными) координатами точки A называются координаты вектора $\vec{OA}$ относительно базиса $\vec{l}_1, \vec{l}_2, \vec{l}_3$ (рис. 11).

В пространстве V_3 рассмотрим две точки A и B , координаты которых относительно некоторой аффинной системы координат $O, \vec{l}_1, \vec{l}_2, \vec{l}_3$ соответственно равны (x_1, y_1, z_1) и (x_2, y_2, z_2) . Поставим задачу найти координаты вектора $\vec{AB}$. Очевидно $\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA}$ (см. рис. 11). По определению аффинных координат точки $\vec{OA} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{OB} = (x_2, y_2, z_2)$.

Тогда согласно правилу 1.1 из предыдущего пункта (см. § 2, п. 2) $\vec{AB} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}$. Таким образом, получено следующее правило.

Правило 1.2. Чтобы найти координаты вектора, нужно из координат его конца вычесть координаты его начала.

Замечание 1.4. Аналогичным образом это правило может быть получено и для пространств V_1 и V_2 .

Задачи к лекции 2

1. Векторы $\overrightarrow{AB} = \vec{p}$ и $\overrightarrow{AF} = \vec{q}$ служат двумя смежными сторонами правильного шестиугольника $ABCDEF$. Выразить через $\vec{p}$ и $\vec{q}$ векторы $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DE}$, $\overrightarrow{EF}$, идущие по сторонам этого шестиугольника.

2. На трех некомпланарных векторах $\overrightarrow{AB} = \vec{p}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{q}$ и $\overrightarrow{AA'} = \vec{r}$ построен параллелепипед $ABCA'B'C'D'$. Выразить через $\vec{p}$, $\vec{q}$ и $\vec{r}$ векторы, совпадающие с ребрами, диагональю параллелепипеда и диагоналями граней этого параллелепипеда, для которых вершина A' служит началом.

3. В тетраэдре $ABCD$ даны ребра, выходящие из вершины A : $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$ и $\overrightarrow{AD} = \vec{d}$. Выразить через эти векторы остальные ребра тетраэдра, медиану $\overrightarrow{DM}$ грани BCD и вектор $\overrightarrow{AQ}$, где Q — центр тяжести грани BCD .

4. Дан тетраэдр $OABC$. Полагая $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ и $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$, выразить через $\vec{a}$, $\vec{b}$ и

$\vec{c}$ векторы $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{PQ}$ и $\overrightarrow{RS}$, где M , P и R — середины ребер OA , OB и OC , а N , Q и S — середины соответственно противоположных ребер.

5. На плоскости даны два вектора $\vec{p} = \{2; -3\}$, $\vec{q} = \{1; 2\}$. Найти разложение вектора $\vec{a} = \{9; 4\}$ по базису $\vec{p}$, $\vec{q}$.

6. На плоскости даны четыре точки $A(1; -2)$, $B(2; 1)$, $C(3; 2)$ и $D(-2; 3)$. Определить разложение векторов $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{CD}$ и $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CD}$, принимая в качестве базиса векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$.

7. Точки K и L служат серединами сторон BC и CD параллелограмма $ABCD$. Выразить векторы $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{CD}$ через векторы $\overrightarrow{AK}$ и $\overrightarrow{AL}$.

8. Пусть M — точка пересечения медиан грани ABC треугольной пирамиды $SABC$. Разложить вектор $\overrightarrow{SM}$ по базису $\vec{e}_1 = \overrightarrow{SA}$; $\vec{e}_2 = \overrightarrow{SB}$; $\vec{e}_3 = \overrightarrow{SC}$.

9. Доказать, что отрезки, соединяющие середины противоположных ребер тетраэдра, имеют общую точку и делятся в этой точке пополам.

10. При каких условиях векторы $\vec{p} + \vec{q}$ и $\vec{p} - \vec{q}$ коллинеарны.

11. Пусть $ABCDE$ — правильный пятиугольник, а O — его центр. Доказать, что векторы $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OD}$ и $\overrightarrow{OE}$ линейно зависимы.

Литература

1. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Аналитическая

геометрия: Учебник для вузов. 7-е изд., М.:
ФИЗМАТЛИТ, 2004. -224с.

2. Сандаков Е.Б. Основы аналитической геометрии и линейной алгебры. Учебное пособие, М.: МИФИ, 2005. – 308 с.

3. Бахвалов С.В., Моденов П.С., Пархоменко А.С. Сборник задач по аналитической геометрии. М.: 1964 г., 440 с.