

Федеральное агентство по образованию  
Российской Федерации

Московский инженерно-физический институт  
(государственный университет)

**В.А. Кашурников, А.В. Красавин,  
А.И. Маймистов, П.Ф. Карцев**

# **СВЕРХТЕКУЧЕСТЬ И БОЗЕ-КОНДЕНСАЦИЯ**

Рекомендовано УМО «Ядерные физика и технологии»  
в качестве учебного пособия  
для студентов высших учебных заведений

Москва 2008

УДК 538.941 (075)

ББК 22.36я7

С24

Сверхтекучесть и бозе-конденсация: Учебное пособие / В.А. Кашурников, А.В. Красавин, А.И. Маймистов, П.Ф. Карцев. – М.: МИФИ, 2008. – 168 с.

Материал книги представлен, в основном, в виде достаточно полного обзора эксперимента и теории, однако некоторые вопросы рассмотрены более детально и требуют от читателя знания квантовой механики, статистической физики, физики твердого тела и сверхпроводимости, а также некоторого знакомства с современными методами аналитического и численного исследования сильнокоррелированных систем. Для более полного представления материала в тексте приведены ссылки, как на эксперименты, так и на оригинальные работы по теоретическим исследованиям.

Пособие будет полезно для студентов, аспирантов и научных работников, специализирующихся в физике конденсированного состояния, в частности в вопросах сверхтекучести и бозе-конденсации, низкоразмерных системах, сверхнизких температурах, наноструктурах и фазовых переходах в них.

Пособие подготовлено в рамках Инновационной образовательной программы МИФИ.

Рецензент д.ф.-м.н. проф. В.П. Яковлев

ISBN 978-5-7262-1106-0

© Московский инженерно-физический  
институт (государственный университет),  
2008

## Оглавление

Предисловие.....	6
<b>1. Сверхтекучесть в <math>^3\text{He}</math> и <math>^4\text{He}</math>. История открытия, эксперимент и теория.....</b>	<b>8</b>
1.1. Квантовые кристаллы и квантовые жидкости $^3\text{He}$ , $^4\text{He}$ . Диаграммы состояний. Параметр де Бюра.....	8
1.2. Эксперименты Капицы. Потенциал Леннарда – Джонса. Эффекты фонтанирования, отсутствия кипения. Нулевая вязкость. Вибрирующие струны, пластины. Скачок теплоемкости. Теплопроводность.....	12
1.3. Двухжидкостная теория Ландау сверхтекучей бозе-жидкости. Эксперименты Андроникашвили. Сверхщель. Вращающаяся жидкость.....	17
1.4. Статистика Бозе – Эйнштейна. Конденсация. Точка перехода. Химический потенциал. Число частиц в основном состоянии. Скачок теплоемкости.....	20
1.5. Возбуждения в неидеальном бозе-газе. Спектр Боголюбова. Фононы и ротоны.....	26
1.6. Сверхтекучесть. Двухжидкостная модель. Критерий сверхтекучести Ландау. Термодинамика сверхтекучей жидкости. Второй звук.....	33
1.7. Квантование циркуляции и топологические вихри. Эффект Хесса – Фейрбенка.....	36
Приложение 1. Анализ эффекта Хесса – Фейрбенка (Hess – Fairbank) в одномерном случае.....	48
1.8. Изотоп $^3\text{He}$ – сверхтекучая ферми-жидкость. Диаграмма состояний. Возможный ферромагнитный переход. Энтропия жидкости и твердого состояния.....	56
1.9. Уравнение Клаузиуса – Клапейрона. Эффект Померанчука. Кривая плавления. Магнитная восприимчивость. Фазовая диаграмма. Три сверхтекучие фазы.....	58

1.10.	Теоретические представления. $p$ -спаривание. Фазы Андерсона – Морела и Бальяна – Вертхамера. Теплоемкость .....	67
1.11.	Анизотропные вихри. Анизотропия сверхтекучей плотности. Эксперименты .....	74
1.12.	Смеси $^3\text{He}$ в $^4\text{He}$ . Фермиевская жидкость в бозе-фоне. Уровни Андреева. Эксперименты.....	77
<b>2.</b>	<b>Низкоразмерная сверхтекучесть.....</b>	<b>82</b>
2.1.	Фазовые переходы "моттовский изолятор – сверхтекучая жидкость". Низкоразмерная сверхтекучесть. Проблема существования фазовых переходов. Бозонная модель Хаббарда .....	82
2.2.	Фазовые диаграммы "сверхтекучесть – бозе-стекло – моттовский изолятор". Связь с другими моделями.....	85
2.3.	Определение критических точек. Численный спектроскопический анализ. Сверхтоковые состояния. Идентификация сверхтоковых и фононных возбуждений в одномерной разупорядоченной системе .....	90
2.4.	Критерии фазовых переходов для одномерных систем. Особенности одномерной ситуации. Понятие о ренормализационной группе. Одномерная модель Жиамарчи и Шульца .....	96
2.5.	Теоретические исследования критических точек в бозонной модели Хаббарда. Редуцированная и hard-core бозонные модели Хаббарда .....	98
<b>3.</b>	<b>Бозе-конденсация в газовой фазе.....</b>	<b>107</b>
3.1.	Спин-поляризованный водород. Осаждение над гелиевой поверхностью. Уровни энергии водородоподобных атомов и расщепление в магнитном поле.....	107
3.2.	Магнитооптические ловушки. Эксперименты в щелочных металлах. Сверхнизкое охлаждение. Лазерное испарение. Наблюдение бозе-конденсата .....	109

3.3. Трехчастичная рекомбинация и закон “1/6”. Трехмерный и двумерный газ – проблемы конденсации. Уравнение Гросса – Питаевского .....	118
3.4. Бозонные оптические решетки. Фазовые переходы «сверхтекучесть – моттовский изолятор». Оболочечная структура .....	121
Приложение 2. Расщепление спектров атомов в магнитном поле .	127
Приложение 3. Принципы лазерного охлаждения .....	128
<b>4. Солитоны в бозе-конденсатах .....</b>	<b>130</b>
4.1. Облако бозе-конденсата в ловушке .....	130
4.1.1. Уравнение Гросса – Питаевского .....	131
4.1.2. Бозе-эйнштейновская конденсация в квазиодномерной параболической ловушке. Одномерное уравнение Гросса – Питаевского .....	134
4.1.3. Одномерное нелинейное уравнение Шредингера.....	138
4.2. Эксперименты с солитонами в бозе-эйнштейновском конденсате .....	141
4.3. Солитоны в бозе-конденсатах. Оптические решетки.....	147
4.3.1. Охлажденные атомы в оптических решетках .....	147
Приложение 4. Эффект Штарка.....	150
4.3.2. Бозонная модель Хаббарда в оптическом потенциале..	151
4.3.3. Уравнения движения в приближении сильной связи ....	154
4.3.4. Экспериментальное наблюдение солитонов в оптических решетках .....	156
4.3.5. Численное моделирование. Одномерные оптические решетки .....	158
4.3.6. Численное моделирование. Двумерные оптические решетки .....	160
Список литературы.....	164

## Предисловие

Последние годы XX в. и первые десятилетия XXI столетия ознаменовались историческими событиями в физике сильнокоррелированных систем.

В 1995 г. были экспериментально получены бозе-эйнштейновские конденсаты атомарных газов щелочных металлов ( ${}^7\text{Li}$ ,  ${}^{23}\text{Na}$ ,  ${}^{87}\text{Rb}$ ) при сверхнизких температурах в несколько сот нанокельвин. При этих экстремально низких температурах удалось получить квантовое состояние вещества, представляющее собой несколько тысяч атомов в одном и том же квантовом основном состоянии.

В 2002 г. в этих же системах были получены бозонные оптические решетки – искусственные кристаллические образования, сконструированные из стоячих оптических волн и бозонного газа. В этих решетках удалось наблюдать фазовые переходы *сверхтекучесть – моттовский изолятор*, до этого времени только теоретически изучавшиеся учеными.

Эти достижения базировались на более ранних исследованиях уникального явления сверхтекучести изотопов  ${}^4\text{He}$  (1937 г.) и  ${}^3\text{He}$  (1972 г.) в жидкой фазе, низкоразмерной сверхтекучести и бозе-конденсации (80-90-е годы XX в.), и др.

В последние годы развилась технология получения наноструктур: плоских квантовых ям, систем наноточек и т.д. На основе этих структур планируется изготавливать элементы будущих наносхем для электроники. Спиновые степени свободы наноточек стали также объектом исследования в свете их использования для элементов переключающих устройств и логических элементов квантовых компьютеров.

Фазовые переходы в системах со спиновыми степенями свободы, магнитных наномолекулах близки по квантово-механическим

свойствам к фазовым переходам, наблюдаемым в бозе-системах; эти переходы часто имеют общие уравнения ренормализационной группы и схожие фазовые диаграммы. Методы расчета и анализа спиновых и бозе-систем во многих случаях совпадают, поэтому следует подчеркнуть, что результаты для бозе-систем, рассмотренные в данной книге, будут справедливы и для систем со спиновыми степенями свободы.

Материал книги представлен, в основном, в виде достаточно полного обзора эксперимента и теории, однако некоторые вопросы рассмотрены более детально и требуют от читателя знания квантовой механики, статистической физики, физики твердого тела и сверхпроводимости, а также некоторого знакомства с современными методами аналитического и численного исследования сильнокоррелированных систем. Для более полного представления материала в тексте приведены ссылки, как на эксперименты, так и на оригинальные работы по теоретическим исследованиям.

Пособие будет полезно для студентов, аспирантов и научных работников, специализирующихся в физике конденсированного состояния, в частности в вопросах сверхтекучести и бозе-конденсации, низкоразмерных системах, сверхнизких температурах, наноструктурах и фазовых переходах в них.

# 1. Сверхтекучесть в $^3\text{He}$ и $^4\text{He}$ . История открытия, эксперимент и теория

В этой главе будет рассмотрено явление сверхтекучести в конденсированной сильнокоррелированной фазе (в фазе жидкости). Единственными представителями таких систем являются изотопы гелия.

## 1.1. Квантовые кристаллы и квантовые жидкости $^3\text{He}$ , $^4\text{He}$ . Диаграммы состояний. Параметр де Бура

Представление о *квантовых* жидкостях не будет полным без предварительного определения понятия о *квантовом кристалле*. По определению, *квантовым* называется кристалл, в котором амплитуда *нулевых* колебаний частиц, образующих пространственную решетку, сравнима с межатомным расстоянием. Это может привести к заметной вероятности квантового туннелирования частиц, и описание такой системы требует учета квантовой статистики.

Степень “квантовости” кристалла оценивают через *параметр де Бура*, который характеризует отношение средней кинетической энергии частицы к энергии взаимодействия частиц  $E$ :

$$\Lambda \approx \frac{\hbar}{a} \frac{1}{\sqrt{mE}} \sim \left(\frac{a_0}{a}\right)^2, \quad (1.1)$$

где  $a_0$  – амплитуда нулевых колебаний,  $a$  – постоянная решетки,  $m$  – масса частицы. Как видно из (1.1), параметр де Бура является мерой величины нулевых колебаний по отношению к постоянной решетки. Очевидно также, что чем тяжелее атомы, составляющие кристалл, тем меньше этот параметр, и тем менее “квантовым” является кристалл, который из них состоит.

Наибольших значений параметр де Бюра достигает у изотопов гелия  ${}^3\text{He}$  ( $\Lambda \sim 3.1$ ),  ${}^4\text{He}$  ( $\Lambda \sim 2.7$ ). У инертных газов  $\Lambda_{\text{Ne}} \sim 0.6$ ;  $\Lambda_{\text{Ar}} \sim 0.18$ ;  $\Lambda_{\text{Kr}} \sim 0.1$ ;  $\Lambda_{\text{Xe}} \sim 0.06$ .

К квантовым кристаллам относят также гипотетические кристаллы, образованные не из атомов, а из электронов (кристалл Вигнера), экситонов и т.п., которые получают при наличии сильного межчастичного взаимодействия в совокупности с малой плотностью газа частиц и низкой размерностью системы. Однако *единственными в природе реальными* квантовыми кристаллами являются только твердые  ${}^3\text{He}$  и  ${}^4\text{He}$ .

В твердом состоянии изотопы гелия, в отличие от кристаллов инертных газов, образуют несколько типов решеток: ГЦК (гранецентрированную кубическую), ГПУ (гексагональную плотноупакованную) и ОЦК (объемноцентрированную кубическую), и испытывают структурные переходы при изменении температуры и давления (см. фазовые диаграммы на рис. 1.1). Квантовость проявляется в том, что соседние атомы нельзя рассматривать как частицы, независимо колеблющиеся около своих положений равновесия (узлов решетки). Вследствие малой массы и чрезвычайно слабого взаимодействия атомы гелия находятся в состоянии достаточно интенсивного нулевого движения и совершают туннелирование вдоль положений равновесия решетки с взаимным обменом местами. Интересно, что это приводит к своеобразной “мягкости” кристалла, к его самозалечиванию всех дефектов структуры. Также все примеси со временем уходят из массива гелия, так что кристалл и жидкость гелия являются *самыми чистыми* веществами в природе.

Из фазовых диаграмм видно, что твердый  ${}^4\text{He}$  можно получить при давлении меньше 25 атм., а твердый  ${}^3\text{He}$  – меньше 30 атм. Более того, при нормальном давлении оба изотопа гелия – *квантовые жидкости даже при нулевой* температуре.  ${}^3\text{He}$  – ферми-жидкость, так как у этого изотопа некомпенсированный

спин за счет недостающего нейтрона, а  ${}^4\text{He}$  (каждый атом состоит из двух нейтронов, двух протонов и двух электронов) – бозе-жидкость с нулевым спином. Подчеркнем также, что других реальных *квантовых* жидкостей в природе *не наблюдается*. Наиболее близкие к гелию по физико-химическим свойствам инертные газы Ne, Ar, Kr и Xe переходят в твердое состояние при  $T < 100$  К, не проявляя квантовых свойств в силу большей атомной массы. Более строго условие квантовости жидкости при конечной температуре можно определить из соотношения

$$\lambda_T = \frac{\hbar}{2\pi m k_B T} \sim a; \quad (1.2)$$

сравнимость масштабов тепловой длины волны де Бройля  $\lambda_T$  и межатомного расстояния  $a$  приводит к перекрытию волновых функций соседних атомов. Тепловая длина характеризует амплитуду тепловых колебаний, так что условие (1.2) является также оценкой температуры, ниже которой возможно наблюдать квантовое поведение жидкости.

Наиболее ярким свойством квантовой жидкости  ${}^4\text{He}$  является ее *сверхтекучесть* при  $T_\lambda < 2.17$  К, открытая П.Л. Капицей в 1937 г. [1] (Нобелевская премия 1978 г.). Объясненное Ф. Лондоном и Л.Д. Ландау в 1941 г. [2] (Нобелевская премия 1962 г.), это физическое явление послужило толчком в понимании низкотемпературных свойств сильновзаимодействующих сред, и, в частности, стимулировало в дальнейшем объяснение явления сверхпроводимости (1957 г., Бардин, Купер, Шриффер, см. [3 – 5]).

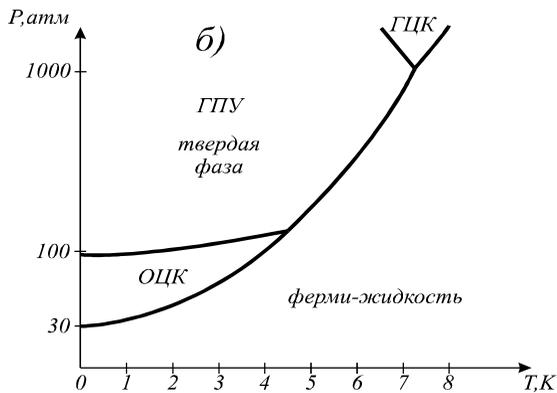
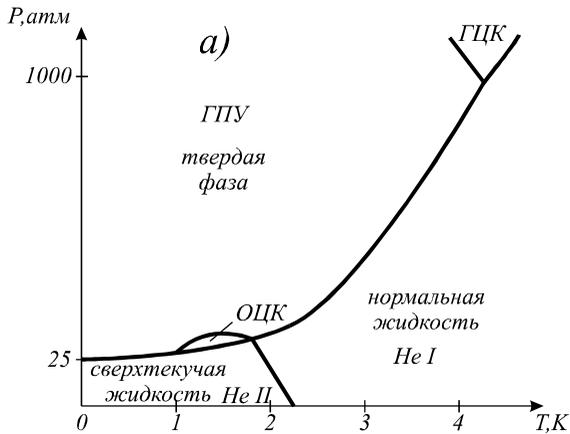


Рис. 1.1. Диаграмма фазовых состояний: а)  ${}^4\text{He}$ , б)  ${}^3\text{He}$

Экспериментальное наблюдение сверхтекучести в ферми-жидкости  ${}^3\text{He}$  ( $T_c < 3$  мК) Д.Д. Ошеровым, Р.С. Ричардсоном и Д.М. Ли в 1972 г. [6] открыло новую главу в понимании явления сверхтекучести. В 1996 г. этим ученым была присуждена Нобелевская премия.

## 1.2. Эксперименты Капицы. Потенциал Леннарда – Джонса. Эффекты фонтанирования, отсутствия кипения. Нулевая вязкость. Вибрирующие струны, пластины. Скачок теплоемкости. Теплопроводность

Историю открытия и исследования жидкости, состоящей из природного изотопа  $^4\text{He}$  следует начать с 1908 г. В 1908 г. в знаменитой Лейденской лаборатории Камерлинг-Оннес сумел получить жидкий гелий при температуре 4.21 К. В 1911 г. он обнаружил явление сверхпроводимости при исследовании сопротивления ртути при гелиевых температурах (об этом явлении см. в [3] и [7]). Одна из первых Нобелевских премий была вручена Камерлинг-Оннесу в 1913 г. “за исследования свойств вещества при низких температурах, приведших, кроме всего прочего, к получению жидкого гелия”.

Вплоть до 1987 г., когда был открыт ВТСП  $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_{6+\delta}$  с  $T_c \sim 92$  К, и появилась возможность использовать жидкий азот, жидкий  $^4\text{He}$  был основным безопасным хладагентом, который использовался при изучении низкотемпературных свойств веществ. Парное взаимодействие между нейтральными атомами инертного газа хорошо аппроксимируется потенциалом Леннарда – Джонса («6-12»):

$$V(r) = 4\varepsilon \left[ \left( \frac{\sigma}{r} \right)^{12} - \left( \frac{\sigma}{r} \right)^6 \right] \quad (1.3)$$

ван-дер-ваальсовского типа (рис. 1.2), где  $\varepsilon \sim 0.01$  эВ,  $\sigma \sim 3$  Å.

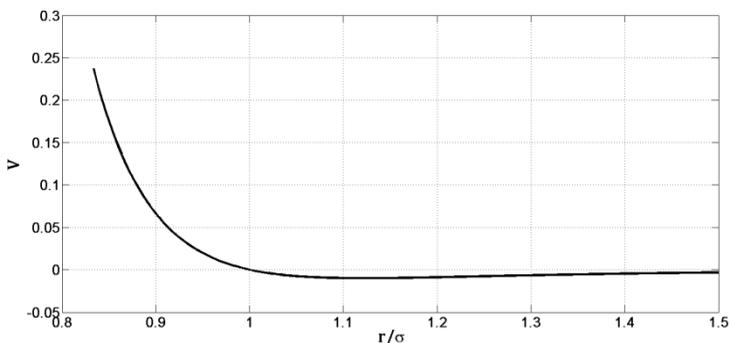


Рис. 1.2. Потенциал Леннарда – Джонса (1.3), описывающий взаимодействие между атомами инертного газа ( $\epsilon \sim 0.01$  эВ,  $\sigma \sim 3$  Å)

Газообразная, жидкая и твердая фазы в остальных инертных газах (Ne, Ar, Kr, Xe) неплохо описываются моделью ансамбля классических частиц с таким межчастичным взаимодействием. Однако случай гелия не соответствует обычному классическому описанию, что наглядно продемонстрировано на фазовой диаграмме, рассмотренной выше.

Физические свойства изотопа  $^4\text{He}$  не привлекали особого внимания исследователей вплоть до 1937 г., когда П.Л. Капица провел свой знаменитый опыт по охлаждению гелия откачкой паров над поверхностью, доведя таким образом температуру жидкости до 2.17 К. Он обнаружил удивительное явление: поверхность кипящей до этого жидкости стала спокойной, кипение прекратилось. Это были явные признаки наблюдения фазового перехода в новое физическое состояние. Позднее измерения теплоемкости подтвердили наличие термодинамического фазового перехода второго рода (В. Влеанеу, 1939 [8]): на температурной зависимости теплоемкости именно при этой температуре ( $T_\lambda = 2.17$  К) наблюдался излом производной (рис. 1.3), по форме похожий на греческую букву  $\lambda$  (эту температуру так и назвали  $\lambda$ - точкой).

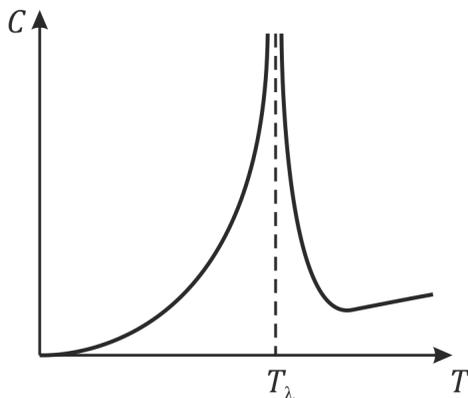


Рис. 1.3. Температурная зависимость теплоемкости в жидком гелии

Фазу жидкости при температуре ниже  $T_\lambda$  называют гелий-II в отличие от фазы обычного жидкого гелия при  $T > T_\lambda$ , которую принято называть гелий-I. Дальнейшие исследования П.Л. Капицы и других ученых выявили совершенно уникальные свойства гелия-II. Гелий-II является почти идеальным проводником тепла, так что в точке перехода теплопроводность гелия возрастает на несколько порядков, и в случае малых тепловых потоков стремится к бесконечности. Это и объясняет отсутствие пузырькового кипения, так как создать градиент температуры в гелии-II невозможно. В обычных жидкостях пузырьки образуются, когда локальная температура существенно выше температуры свободной поверхности. В гелии-II любое возникшее локальное повышение температуры быстро “рассасывается”, и пузырек не успевает образоваться.

Наиболее замечательное свойство гелия-II – полное отсутствие вязкости, т.е. идеальная текучесть жидкости без трения – *сверхтекучесть*. Обычные жидкости при движении испытывают трение как со стенками сосуда, так и внутреннее трение частиц жидкости между собой. Жидкий гелий-II может свободно протекать сквозь мельчайшие поры и щели.

Интересный эксперимент – истекание гелия из сосуда. Если маленькую пробирку с гелием-II медленно поднимать над гелиевой ванной, то в пробирке на стенках образуется подвижная пленка, позволяющая жидкости подниматься по внутренним стенкам, переливаться через край и стекать обратно в ванну, так что через некоторое время пробирка становится пустой (рис. 1.4, а).

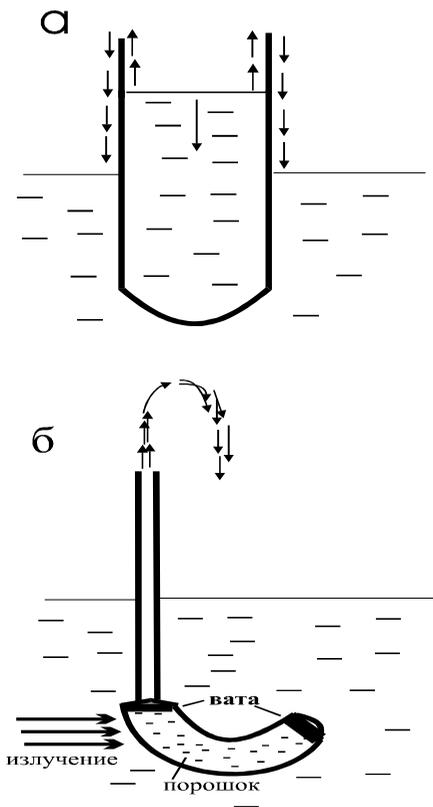


Рис. 1.4. Эксперименты по наблюдению сверхтекучести в  $^4\text{He}$ :  
 а) выравнивание гравитационных потенциалов за счет сверхтекучей пленки; б) эффект фонтанирования

Получается, что сверхтекучий гелий течет вдоль пленки всегда, когда существует разность уровней между двумя объемами жидкости, т.е. пленка работает как сифон, причем движущую силу для сверхтекучей части жидкости создает разность гравитационного потенциала между концами пленки.

Сверхтекучесть гелия объясняется нулевой вязкостью. Вязкость определяется как измерением вязкого сопротивления потоку, так и расчетом вязких сил, действующих на тело, движущееся в жидкости. Особенно изящны эксперименты с незатухающим потоком жидкости (Реппи и Депати, 1964 [9]). Сосуд, имеющий форму тора, заполняли пористым материалом с очень тонкими каналами, пропускающими жидкость. Тор вращали вокруг оси симметрии при  $T > T_\lambda$ , охлаждали, продолжая вращать, до  $T < T_\lambda$ , а затем останавливали, после чего течение гелия-II продолжалось еще по крайней мере 12 ч без снижения угловой скорости, что доказывало нулевую вязкость.

В то же время целый класс экспериментов с осциллирующими дисками (Кеезом, Мак-Вуд, 1970 [10]), вибрирующими проволочками и другими предметами приводил к значениям вязкости, немного меньшим, чем для газообразного гелия, что противоречило результатам по незатухающему потоку. Эти эксперименты рассматриваются далее.

Красивый эффект, иллюстрирующий сверхтекучие свойства – эффект фонтанирования (Аллен и Джонс, 1938 [11]). Если стеклянную трубку, плотно заполненную порошком (типа оксида железа), частично погрузить в гелиевую ванну, а затем нагреть, то забьет фонтан гелия, поднимающийся намного выше уровня гелия в ванне (рис. 1.4, б).

### 1.3. Двухжидкостная теория Ландау сверхтекучей бозе-жидкости. Эксперименты Андроникашвили. Сверхщель. Вращающаяся жидкость

Для объяснения явления сверхтекучести Л.Д. Ландау в 1941 г. предложил так называемую двухжидкостную модель [2]. Согласно этой модели, жидкий  ${}^4\text{He}$  при  $T < T_\lambda$  представляет собой жидкость, состоящую из двух взаимопроникающих компонент – нормальной и сверхтекучей. Сверхтекучая компонента без трения протекает сквозь поры и щели. Кроме того, она не взаимодействует диссипативно со стенками сосуда, содержащего жидкость. На эту сверхтекучую компоненту накладывается нормальная компонента, которая эффективно переносит тепло и имеет ненулевую вязкость. Сразу следует отметить, что эти две жидкости физически неразделимы, неправильно считать, что некоторые атомы принадлежат нормальной жидкости, а другие – сверхтекучей. Таким образом, ниже  $T_\lambda$  в жидком гелии имеют место два типа движений – сверхтекучее со скоростью  $v_s$  и плотностью  $\rho_s$  и нормальное со скоростью  $v_n$  и плотностью  $\rho_n$ . Для достаточно малых скоростей ниже некоторой критической скорости можно полагать, что полная плотность  $\rho$  и полная плотность потока  $j$  являются суммой вкладов от обеих составляющих:

$$\begin{aligned}\rho &= \rho_s + \rho_n; \\ j &= \rho_s v_s + \rho_n v_n.\end{aligned}\tag{1.4}$$

Такое теоретическое представление гелия-II неплохо согласуется со всеми экспериментальными результатами. Исследования показали, что пленка гелия на выступающих из гелиевой ванны поверхностях (например, на пробирке) чрезвычайно толстая:  $\sim 30$  нм (100 атомных слоев). Этого достаточно для обеспечения течения жидкости вдоль пленки. Течение жидкости (даже вверх, против силы тяжести!) внутри пленки обусловлено сверхтекучей компонентой, стремящейся выровнять гравитационные потенциалы (например, при подъеме пробирки из ванны).

Эффект фонтанирования (см. рис. 1.4, б) объясняется с точки зрения двухжидкостной модели следующим образом: при нагревании порошка в изогнутой части трубки по обе стороны порошка создается разность температур; нормальная компонента, ответственная за перенос тепла, потечет в ванну, так как не может проходить сквозь извилистые каналы в порошке, а сверхтекучая компонента для компенсации избыточного давления – через порошок в трубку, причем с такой скоростью, что появляется фонтан. Фактически, перенос тепла и массы в гелии-II неразделимы. Нормальная компонента всегда потечет от источника тепла, а сверхтекучая – наоборот, так что суммарная плотность останется постоянной. Любой искусственно созданный перепад температур в гелии-II будет обязательно сопровождаться перепадом давления. Канал, обеспечивающий движение только сверхтекучей компоненты, называется *сверхканалом* (или *сверхщелью*).

Для определения температурной зависимости  $\rho_s$  и доказательства справедливости двухжидкостной модели был проведен целый ряд экспериментов. Наиболее яркие и красивые по исполнению – эксперименты с крутильным маятником (Андроникашвили, 1946 [12], рис. 1.5). Стопка расположенных на равных расстояниях друг от друга металлических дисков подвешивалась на крутильной нити так, чтобы были возможны осцилляции в жидком гелии. Расстояние между дисками подбиралось так, чтобы при  $T > T_\lambda$  вся жидкость между дисками увлекалась ими. Эксперимент показал, что при  $T < T_\lambda$  период осцилляций резко падал, что говорило о том, что часть жидкости не увлекается дисками. Измерения при различных температурах дают возможность рассчитать сверхтекучую долю жидкости:

$$\frac{\rho_s}{\rho} = 1 - \left(\frac{T}{T_\lambda}\right)^{3/2}. \quad (1.5)$$

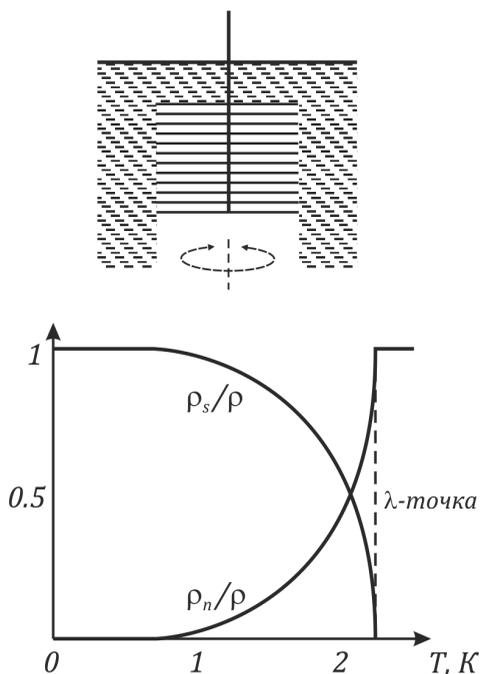


Рис. 1.5. Эксперимент Андрионикашвили

Для объяснения противоречия результатов по измерению вязкости в случае вращения гелия-II и в случае его протекания в пористых каналах были развиты специальная гидродинамика и термодинамика сверхтекучей жидкости, которые учитывают взаимодействие между сверхтекучей и нормальной компонентами. Оказалось, что во вращающемся сосуде нормальная часть жидкости ведет себя обычным образом – вращается как твердое тело. Сверхтекучая же часть пронизана целым рядом так называемых вихревых нитей, образующих, как правило, регулярную решетку. Сверхтекучая компонента вращается вокруг каждой нити, причем момент количества движения, связанный с каждым вихрем, квантуется. Количество вихревых нитей таково, что суммарный момент, связанный с ними, совпадает с таким его значением, как если бы вся сверхтекучая часть участвовала во вращении.

Теория Ландау учитывает, что, так как результирующий спин атома  $^4\text{He}$  равен нулю, он является бозоном, т.е. подчиняется статистике Бозе – Эйнштейна. Температурная зависимость плотности бозе-конденсата, согласно теории, совпадает с экспериментальным законом (1.5). Именно конденсатная часть и отождествляется со сверхтекучей жидкостью. Для взаимодействующих атомов гелия, моделируемых как бозе-газ с взаимодействием, спектр возбуждений состоит как из обычных звуковых возбуждений – фононов, так и из ротонов – локализованных вихревых образований. Именно фононы и ротоны составляют нормальную компоненту гелия-II.

#### **1.4. Статистика Бозе – Эйнштейна. Конденсация. Точка перехода. Химический потенциал. Число частиц в основном состоянии. Скачок теплоемкости**

Для ансамбля одинаковых квантовых частиц должен выполняться принцип тождественности, т.е. состояния системы, получающиеся друг из друга просто перестановкой координат частиц, должны быть физически полностью эквивалентны. Это значит, что в результате такой перестановки волновая функция системы может измениться только на несущественный фазовый множитель. Другими словами, если  $|\Psi(1,2)|^2 = |\Psi(2,1)|^2$ , то  $|\Psi(1,2)| = \exp(i\alpha)|\Psi(2,1)|$ , где  $\alpha$  – вещественная постоянная. Повторная перестановка дает  $\exp(2i\alpha) = 1$ , т.е.  $|\Psi(1,2)| = \pm|\Psi(2,1)|$ . Поэтому волновая функция системы либо симметрична (*статистика Бозе*), либо антисимметрична (*статистика Ферми*). Этот факт отражается на соотношениях коммутации при описании системы в терминах вторично-квантованных операторов, а также на виде функции распределения. Рассмотрим газ *невзаимодействующих* частиц с симметричной волновой функцией, описываемых во вторичном квантовании операторами

рождения  $a^+$  и уничтожения  $a$ , подчиняющихся следующим коммутационным соотношениям Бозе:

$$\begin{aligned} a_k a_{k'}^+ - a_{k'}^+ a_k &= \delta_{kk'}; \\ a_k^+ a_{k'}^+ - a_{k'}^+ a_k^+ &= 0; \\ a_k a_{k'} - a_{k'} a_k &= 0. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Таким образом, в отличие от фермионов, волновая функция симметрична по перестановкам координат и импульсов частиц. На волновую функцию в представлении чисел заполнения  $|n_{k_1} \dots n_{k_N}\rangle$ , где  $n_{k_i}$  – числа заполнения в состоянии с импульсом  $k_i$ , операторы  $a^+$ ,  $a$  действуют следующим образом:

$$\begin{aligned} a_k |n_k\rangle &= \sqrt{n_k} |n_k - 1\rangle; \\ a_k^+ |n_k\rangle &= \sqrt{n_k + 1} |n_k + 1\rangle; \\ a_k^+ a_k |n_k\rangle &= n_k |n_k\rangle. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Числа заполнения квантовых состояний при симметричных волновых функциях ничем не ограничены и могут иметь произвольные значения, в отличие от антисимметричных волновых функций фермионов, для которых действует принцип Паули. Функцию распределения бозе-частиц несложно получить, рассмотрев термодинамический потенциал системы  $\Omega = -T \ln Z$ , где статистическая сумма  $Z$  в большом каноническом ансамбле для системы невзаимодействующих частиц имеет вид

$$Z = \sum_N e^{\mu N/T} \sum_n e^{-E_n N/T} = \sum_{n_k} (e^{\beta(\mu - \varepsilon_k)})^{n_k}, \quad (1.8)$$

так как энергия  $n_k$  частиц в состоянии  $k$  равна  $\varepsilon_k n_k$ . Заметим, что в правой части (1.8) стоит геометрическая прогрессия, и для ее сходимости необходимо, чтобы  $e^{\beta(\mu - \varepsilon_k)} < 1$ . Это условие должно выполняться для всех состояний  $\varepsilon_k$ , в том числе и для  $\varepsilon_k = 0$ . Отсюда находим, что химический потенциал должен быть отрицателен:  $\mu < 0$ . Суммируем геометрическую прогрессию и получаем для статистической суммы состояния  $k$ :

$$\Omega_k = T \ln \left( 1 - \exp \left[ \frac{\mu - \varepsilon_k}{T} \right] \right). \quad (1.9)$$

Теперь можно найти средние числа заполнения  $\langle n_k \rangle = -\partial \Omega_k / \partial \mu$ :

$$n_k(T) = \langle n_k \rangle = \langle a_k^\dagger a_k \rangle = \frac{1}{\exp\left(\frac{\varepsilon_k - \mu}{T}\right) - 1}. \quad (1.10)$$

Выражение (1.10) является одночастичной функцией распределения Бозе – Эйнштейна.

Энергия одной частицы равна  $\varepsilon_k = \hbar^2 k^2 / 2m$ . Полное число частиц  $N$  в газе получаем, суммируя (1.10):

$$N = \sum_k \frac{1}{\exp\left(\frac{\varepsilon_k - \mu}{T}\right) - 1} = \frac{Vm^{3/2}}{\sqrt{2}\pi^2 \hbar^3} \int_0^\infty d\varepsilon \frac{\sqrt{\varepsilon}}{\exp\left(\frac{\varepsilon - \mu}{T}\right) - 1}. \quad (1.11)$$

Уравнение нормировки (1.11) определяет неявно химический потенциал  $\mu$  как функцию температуры  $T$  и плотности  $n = N/V$ . Энергия бозе-газа

$$E = \sum_k \varepsilon_k \frac{1}{\exp\left(\frac{\varepsilon_k - \mu}{T}\right) - 1} = \frac{Vm^{3/2}}{\sqrt{2}\pi^2 \hbar^3} \int_0^\infty d\varepsilon \frac{\varepsilon \sqrt{\varepsilon}}{\exp\left(\frac{\varepsilon - \mu}{T}\right) - 1}. \quad (1.12)$$

Рассмотрим случай низких температур. При низких температурах свойства бозе-газа кардинально отличаются от свойств классической системы уже тем, что основное состояние системы имеет энергию  $E = 0$  (т.е. все частицы сконденсированы в состояние с  $\varepsilon_k = 0$ ). Согласно нормировочному уравнению (1.11), при понижении температуры химический потенциал  $\mu$  возрастает, оставаясь отрицательным, и достигает значения  $\mu = 0$  при температуре  $T_0$ , удовлетворяющей соотношению

$$\frac{N}{V} = \frac{(mT_0)^{3/2}}{\sqrt{2}\pi^2 \hbar^3} \int_0^\infty dz \frac{\sqrt{z}}{e^z - 1} = \frac{(mT_0)^{3/2}}{2\sqrt{2}\pi^{3/2} \hbar^3} \zeta(3/2). \quad (1.13)$$

Здесь учтено, что  $\int_0^\infty \frac{x^{z-1} dx}{e^x - 1} = \Gamma(z)\zeta(z)$ ,  $\zeta(z)$  – дзета-функция Римана ( $\zeta\left(\frac{3}{2}\right) = 2.612$ ),  $\Gamma(z)$  – гамма-функция ( $\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}/2$ ). Из (1.13) получаем температуру (как будет видно далее, температуру конденсации):

$$T_0 = \frac{2\pi}{(\zeta(3/2))^{2/3}} \frac{\hbar^2}{m} \left(\frac{N}{V}\right)^{2/3} = 3.31 \frac{\hbar^2}{m} \left(\frac{N}{V}\right)^{2/3}. \quad (1.14)$$

При более низких температурах  $T < T_0$  уравнение нормировки (1.11) не имеет решений  $\mu < 0$ , хотя они должны существовать для бозе-статистики. Это связано с тем, что в этом случае нельзя переходить формально от суммирования к интегрированию в (1.11). Необходимо более аккуратно учитывать член с  $\varepsilon_k = 0$ : из-за наличия множителя  $\sqrt{\varepsilon}$  он выпадает из суммы. Однако именно он важен при низких температурах, так как именно в состоянии  $\varepsilon_k = 0$  конденсируются все частицы. Формально из (1.11) можно заметить, что при переходе к пределу  $\mu \rightarrow 0$  этот член расходится. Решить эту проблему можно двумя способами: во-первых, устремляя  $\mu$  не к нулю, а к некоторому конечному малому значению, и, во-вторых, рассчитав сначала число частиц при  $\varepsilon > 0$  (при  $T < T_0$ ), так как эта величина, определяемая (1.11) с  $\mu = 0$ , конечна:

$$N_{\varepsilon>0} = \frac{V(mT)^{3/2}}{\sqrt{2}\pi^2\hbar^3} \int_0^\infty dz \frac{\sqrt{z}}{e^z - 1} = N \left(\frac{T}{T_0}\right)^{3/2} \quad (1.15)$$

(здесь использовано определение  $T_0$  (1.13)). Остальные сконденсированные в состояние  $\varepsilon = 0$  частицы определяются из нормировки

$$N_{\varepsilon=0} = N_0 = N \left(1 - \left(\frac{T}{T_0}\right)^{3/2}\right). \quad (1.16)$$

Таким образом, при температуре  $T = T_0$  начинается конденсация бозе-частиц в низшее энергетическое состояние  $\varepsilon = 0$ , и число сконденсированных частиц  $N_0$  определяется степенной зависимостью (1.16). Это наблюдается на эксперименте (Андроникашвили, [12]).

Температурная зависимость химического потенциала бозе-газа показана на рис. 1.6.

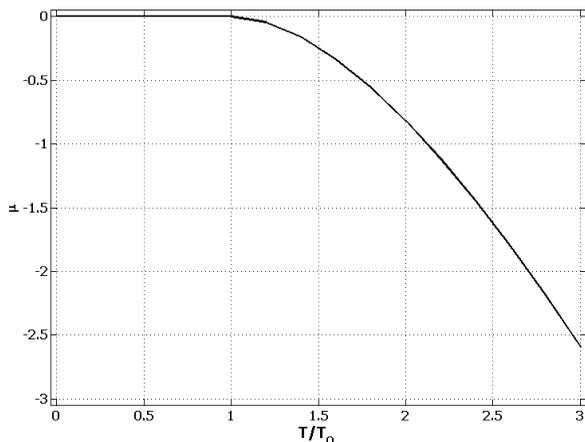


Рис. 1.6. Зависимость химического потенциала бозе-газа от температуры

Определим термодинамические величины бозе-газа в условиях наличия конденсата ( $T < T_0$ ). Они определяются только частицами с  $\varepsilon > 0$ . Полагая везде  $\mu = 0$ , находим энергию  $E$ , теплоемкость  $C$ , энтропию  $S$  и свободную энергию  $F$ :

$$\begin{aligned}
 E &= \frac{Vm^{3/2}}{\sqrt{2}\pi^2\hbar^3} \int_0^\infty d\varepsilon \frac{\varepsilon\sqrt{\varepsilon}}{\exp(\varepsilon/T) - 1} = \frac{3V(mT)^{3/2}T}{4\sqrt{2}\pi^{3/2}\hbar^3} \zeta(5/2) = \\
 &= 0.770NT \left(\frac{T}{T_0}\right)^{3/2}; \\
 C &= \frac{\partial E}{\partial T} = \frac{5E}{2T} \sim T^{3/2}; \\
 S &= \int \frac{C}{T} dT = \frac{5E}{3T}; \\
 F &= E - TS = -\frac{2}{3}E.
 \end{aligned} \tag{1.17}$$

В точке  $T = T_0$  все величины (1.17) непрерывны (рис. 1.7), однако производная теплоемкости испытывает в этой точке конечный скачок, т.е. теплоемкость имеет при  $T = T_0$  излом и равна  $1.92N$  (рис. 1.8). Таким образом, явление бозе-конденсации – фазовый переход второго рода.

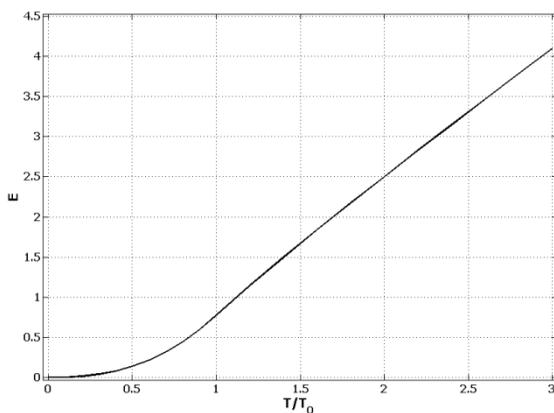


Рис. 1.7. Зависимость энергии бозе-газа от температуры

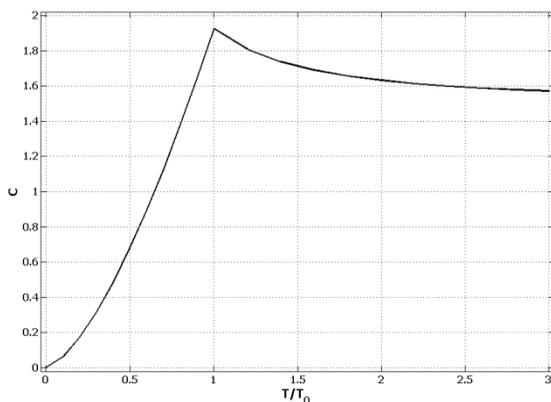


Рис. 1.8. Зависимость теплоемкости бозе-газа от температуры

Заметим, что зависимость теплоемкости от температуры близка к наблюдаемой экспериментально в жидком гелии (см. рис. 1.3), а оценка критической температуры  $T_0$  – к экспериментальному значению  $T_\lambda$ .

### 1.5. Возбуждения в неидеальном бозе-газе. Спектр Боголюбова. Фононы и ротоны

Рассмотрим сначала качественно возможные возбуждения *во взаимодействующем* бозе-газе в длинноволновом пределе  $p \rightarrow 0$ . В квантовой бозе-системе элементарные возбуждения должны иметь целочисленный спин, так как момент импульса всякой квантово-механической системы может меняться только на целое число. Поэтому в квантовой бозе-жидкости элементарными возбуждениями с малыми импульсами  $p$  являются обычные гидродинамические волны, т.е. фононы (квазичастицы с нулевым спином). Таким образом, закон дисперсии возбуждений должен быть линейен:

$$\varepsilon_p = up, \quad (1.18)$$

где размерный коэффициент  $u$  имеет смысл скорости звука. Число этих возбуждений стремится к нулю при  $T \rightarrow 0$ , и при низких температурах, когда их число мало, и они практически не взаимодействуют, их можно считать идеальным бозе-газом с нулевым химическим потенциалом  $\mu = 0$  (число возбуждений не фиксировано), с функцией распределения возбуждений

$$n(p) = \frac{1}{\exp(\varepsilon_p/T) - 1}. \quad (1.19)$$

Зная распределение (1.19) и закон дисперсии (1.18), можно, аналогично случаю идеального бозе-газа, рассчитать термодинамические величины жидкости при низких температурах:

$$E = V \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^\infty d^3p \frac{up}{\exp(up/T) - 1} = \frac{\pi^2}{30u^3} VT^4, \quad (1.20)$$

где

$$\begin{aligned} C &= \frac{\partial E}{\partial T} = 4 \frac{E}{T} \sim T^3; \\ S &= \int \frac{C}{T} dT = \frac{4E}{3T}; \\ F &= E - TS = -\frac{1}{3}E. \end{aligned} \quad (1.21)$$

При увеличении импульса закон дисперсии отличается от линейного (1.18), и дальнейший ход зависимости определяется взаимодействием между частицами бозе-газа.

Получим закон возбуждений над основным состоянием взаимодействующего бозе-газа. Рассмотрим слабо неидеальный бозе-газ с одинаковым взаимодействием  $U$  между парами частиц, описываемый гамильтонианом

$$H = \sum_p \varepsilon_p a_p^\dagger a_p + \frac{U}{2V} \sum_{\substack{p_1 p_2 p_3 p_4 \\ p_1 + p_2 = p_3 + p_4}} a_{p_4}^\dagger a_{p_3}^\dagger a_{p_2} a_{p_1}, \quad (1.22)$$

где  $\varepsilon_p = p^2/2m$ , а взаимодействие  $U$  связано с амплитудой рассеяния  $a$  между двумя одинаковыми частицами, имеющей величину порядка межчастичного расстояния,  $a^3 \sim V/N$ , соотношением

$$U = \frac{4\pi a}{m}. \quad (1.23)$$

Боголюбов (1947 г., см. [13, 14]) показал, что для описания основного и низших возбужденных состояний удается диагонализировать гамильтониан (1.22) и получить энергетический спектр. Упростим взаимодействующую часть гамильтониана, учитывая, что в основном состоянии частицы находятся в конденсате, и ввиду слабости взаимодействия основное состояние взаимодействующего газа будет слабо отличаться от основного

состояния идеального газа, поэтому число частиц над конденсатом будет много меньше числа конденсатных частиц  $N_0$ :  $N - N_0 \ll N_0$ .

Так как матричные элементы бозевских операторов равны  $\sqrt{N} \sim \sqrt{N_0} \gg 1$  (см. (1.7)), то в (1.22) можно оставить только взаимодействие конденсатных частиц между собой и с возбуждениями, пренебрегая взаимодействием надконденсатных частиц между собой:

$$H_{int} = \frac{U}{2V} \left\{ a_0^+ a_0^+ a_0 a_0 + \sum_{p \neq 0} (2a_p^+ a_0^+ a_p a_0 + 2a_{-p}^+ a_0^+ a_{-p} a_0) + \sum_{p \neq 0} (a_p^+ a_{-p}^+ a_0 a_0 + a_0^+ a_0^+ a_p a_{-p}) \right\}. \quad (1.24)$$

В последней сумме в (1.24) учтены процессы рождения и уничтожения пары возбуждений из конденсата и в конденсат с сохранением суммарного импульса  $p + (-p) = 0$  (это последние два члена в сумме), а также одночастичное рассеяние возбуждений на конденсатной частице (первые два члена).

Так как  $\sqrt{N_0} \gg 1$ , операторы  $a_0^+$  и  $a_0$  можно считать простыми числами, равными  $\sqrt{N_0}$ . Отсюда взаимодействующая часть гамильтониана переписывается в виде

$$H_{int} = \frac{U}{2V} \left[ N_0^2 + N_0 \sum_{p \neq 0} (2a_p^+ a_p + 2a_{-p}^+ a_{-p} + a_p^+ a_{-p}^+ + a_p a_{-p}) \right]. \quad (1.25)$$

Учтем выражение для полного числа частиц:

$$N = N_0 + \frac{1}{2} \sum_{p \neq 0} (a_p^+ a_p + a_{-p}^+ a_{-p}). \quad (1.26)$$

Выразим все числа  $N_0$  через  $N$  в (1.25), ограничиваясь членами, содержащими не более первой степени  $N$ . С учетом (1.26) и (1.25) полный гамильтониан (1.22) переписывается в виде

$$H = \frac{UN^2}{2V} + \frac{1}{2} \sum_{p \neq 0} \left[ \left( \frac{p^2}{2m} + \frac{UN}{V} \right) (a_p^+ a_p + a_{-p}^+ a_{-p}) + \frac{UN}{V} (a_p^+ a_{-p}^+ + a_p a_{-p}) \right]. \quad (1.27)$$

Диагонализуем гамильтониан (1.27). Для этого введем линейные преобразования операторов:

$$\begin{aligned} a_p &= \frac{1}{\sqrt{1 - A_p^2}} (\alpha_p + A_p \alpha_{-p}^+); \\ a_p^+ &= \frac{1}{\sqrt{1 - A_p^2}} (\alpha_p^+ + A_p \alpha_{-p}). \end{aligned} \quad (1.28)$$

Несложно убедиться, что операторы  $\alpha$  также удовлетворяют бозевским соотношениям коммутации. Подставив их в гамильтониан (1.27) и обозначив

$$\begin{aligned} S &= \frac{UN}{V}; \\ S_p &= \frac{p^2}{2m} + S; \\ \Delta_p &= 1 + A_p^2; \\ W_p &= 1 - A_p^2, \end{aligned} \quad (1.29)$$

получим

$$\begin{aligned} H &= \frac{SN}{2} + \sum_{p \neq 0} \frac{1}{W_p} (S_p A_p^2 + S A_p) + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{p \neq 0} \frac{1}{W_p} [(S_p \Delta_p + 2S A_p) (\alpha_p^+ \alpha_p + \alpha_{-p}^+ \alpha_{-p})] + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{p \neq 0} \frac{1}{W_p} [(2S_p A_p + S \Delta_p) (\alpha_p^+ \alpha_{-p}^+ + \alpha_p \alpha_{-p})]. \end{aligned} \quad (1.30)$$

Приравняв коэффициент при недиагональном члене нулю, находим  $A_p$ :

$$2S_p A_p + S \Delta_p = 0 \Rightarrow A_p = \frac{1}{S} \left( -S_p + \sqrt{S_p^2 - S^2} \right). \quad (1.31)$$

В (1.31) перед корнем поставлен знак “+” из-за положительности энергии возбуждений относительно основного состояния  $\varepsilon = 0$ . Подставив (1.31) в (1.30), находим окончательно:

$$H = \frac{SN}{2} + \frac{1}{2} \sum_{p \neq 0} SA_p + \frac{1}{2} \sum_{p \neq 0} \sqrt{S_p^2 - S^2} (\alpha_p^+ \alpha_p + \alpha_{-p}^+ \alpha_{-p}). \quad (1.32)$$

Видно, что (1.32) состоит из некоторой константы  $E_0$ , имеющей смысл энергии основного состояния бозе-жидкости, и энергии возбуждений со спектром  $E_p$ , так что полная энергия системы имеет вид

$$E = \langle H \rangle = E_0 + \frac{1}{2} \sum_{p \neq 0} E_p \langle \alpha_p^+ \alpha_p + \alpha_{-p}^+ \alpha_{-p} \rangle = E_0 + \sum_{p \neq 0} E_p n_p;$$

$$\langle \alpha_p^+ \alpha_p \rangle = n_p;$$

$$E_0 = \frac{SN}{2} + \frac{1}{2} \sum_{p \neq 0} SA_p;$$

$$E_p = \sqrt{S_p^2 - S^2} = \sqrt{\left(\frac{p^2}{2m} + \frac{UN}{V}\right)^2 - \left(\frac{UN}{V}\right)^2}. \quad (1.33)$$

Здесь  $n_p$  – функция распределения возбуждений (1.19), имеющая вид бозе-функции с нулевым химическим потенциалом. В предельных случаях спектр возбуждений имеет вид

$$E_p = \begin{cases} up, & u = \sqrt{UN/mV}, \quad p \rightarrow 0; \\ p^2/2m, & p \rightarrow \infty. \end{cases} \quad (1.34)$$

При малых импульсах получаем, как и следовало ожидать, звуковой закон дисперсии со скоростью звука  $u$ . При больших импульсах имеем спектр свободной частицы, так как взаимодействие перестает играть существенную роль.

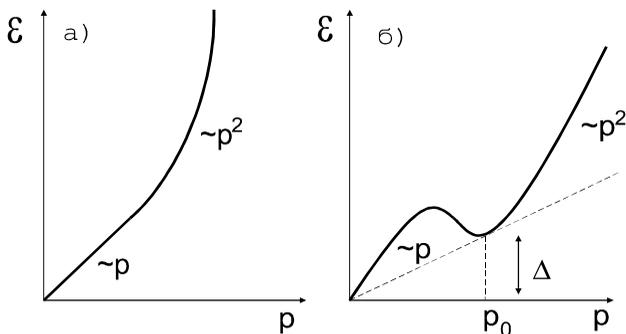


Рис. 1.9. Спектр возбуждений взаимодействующего бозе-газа: а) слабое взаимодействие; б) сильное взаимодействие. Штриховая прямая показывает, что точка  $p_0$  (ротонные возбуждения) соответствует критерию Ландау  $d\varepsilon/dp = \varepsilon/p$ , т.е. сверхтекучесть имеет место, если скорость движения жидкости  $v < \Delta/p_0$

Из вида спектра возбуждений видно, что локальных минимумов на нем нет, так как смене линейной на квадратичную зависимость соответствует только точка перегиба (рис. 1.9, а). Однако это верно лишь для слабонеидеального газа. Для реальных жидкостей при возрастании взаимодействия возможен локальный минимум (рис. 1.9, б) (что наблюдается у жидкого гелия). Вблизи точки минимума  $p_0 \sim 1/a$ ,  $a$  – межатомное расстояние, которая соответствует новым квазичастичным возбуждениям, спектр  $E_p$  можно разложить в виде

$$E_p = \Delta + \frac{(p - p_0)^2}{2m^*}, \quad (1.35)$$

где  $\Delta = E(p_0)$ ;  $m^*$  – эффективная масса этих возбуждений, называемых *ротонами*.

Спектр возбуждений, показанный на рис. 1.9, наблюдался в экспериментах Хеншоу и Вудса по рассеянию медленных нейтронов [15].

Пользуясь законом дисперсии (1.35), получим вклад в термодинамические величины ротонных возбуждений. При низких температурах, полагая  $\Delta \gg T$  (оценки из

экспериментальной спектральной зависимости для жидкого гелия дают  $\Delta = 8.7$  К), можно считать, что распределение ротонов – бoльцмановское:  $n_p = \exp(-E_p/T)$ . Отсюда находим в этом пределе (учитывая также, что  $p_0^2 \gg m^*T$  и при интегрировании удобно перейти к переменной  $x = p - p_0$ ,  $-\infty < x < \infty$ ):

$$\begin{aligned}
 E &= V \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^\infty d^3p E_p e^{-E_p/T} = N_p \left( \frac{1}{2} T + \Delta \right); \\
 C &= \frac{\partial E}{\partial T} N_p \left( \frac{3}{4} + \frac{\Delta}{T} + \frac{\Delta^2}{T^2} \right); \\
 S &= \int \frac{C}{T} dT = N_p \left( \frac{3}{2} + \frac{\Delta}{T} \right); \\
 F &= E - TS = -TN_p; \\
 N_p &= \frac{2(m^*T)^{1/2} p_0^2 V}{(2\pi)^3 \hbar^3} e^{-\Delta/T}. \tag{1.36}
 \end{aligned}$$

Здесь

$$N_p = V \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^\infty d^3p e^{-\frac{E_p}{T}} \tag{1.37}$$

число ротонов. Видно, что зависимость от температуры термодинамических величин, в отличие от случая фононных возбуждений, экспоненциальная:  $\sim e^{-\Delta/T}$ .

Итак, неидеальный бозе-газ имеет два вида возбуждений – фононы и ротонь, отвечающих различным участкам по импульсу  $q$  одной и той же ветви возбуждений. При низких температурах  $\Delta > T$  ротонная часть меньше фононной, и наоборот, при высоких превалирует над фононной, так что теплоемкость имеет сначала степенную зависимость ( $\sim T^3$ ), а затем экспоненциальную ( $\sim e^{-\Delta/T}$ ).

Вернемся теперь к слабонеидеальному газу и закону дисперсии (1.33). Подставляя в (1.26) выражение (1.10), имеем для среднего числа частиц

$$\langle N \rangle = N_0 + \sum_{p \neq 0} \frac{n_p + A_p^2(n_p + 1)}{1 - A_p^2}. \quad (1.38)$$

Полагая  $T = 0$ ,  $n_p = 0$ , из (1.38) находим с учетом (1.31):

$$\begin{aligned} \langle N \rangle \equiv N &= N_0 + \frac{(2m^*S)^{3/2}}{8\pi^2} \int_1^\infty dz \frac{z - \sqrt{z^2 - 1}}{\sqrt{z + 1}} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{N_0}{N} = 1 - \frac{8}{3\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{Na^3}{V}}, \end{aligned} \quad (1.39)$$

где учтено соотношение (1.23) между взаимодействием  $U$  и амплитудой рассеяния  $a$ . Следовательно, в неидеальном бозе-газе далеко не все частицы находятся в конденсате при нулевой температуре.

## 1.6. Сверхтекучесть. Двухжидкостная модель. Критерий сверхтекучести Ландау. Термодинамика сверхтекучей жидкости. Второй звук

При низких температурах наиболее интересным свойством бозе-жидкости является свойство сверхтекучести, одним из проявлений которого является способность жидкости протекать по капиллярным трубкам без трения (Л.Д. Ландау, 1941 [2]). Покажем, что это свойство следует из особенностей рассмотренного выше спектра возбуждений, показанного на рис. 1.9, б.

Рассмотрим бозе-жидкость при  $T = 0$ , текущую по капилляру со скоростью  $\vec{v}$ . Если между жидкостью и стенками капилляра имеется трение, это может привести к увлечению жидкости стенками капилляра и, соответственно, к появлению элементарных возбуждений и диссипации энергии.

Пусть имеется возбуждение с энергией  $\varepsilon_p$  и импульсом  $p$ . Тогда энергия жидкости, связанная с этим возбуждением, имеет вид

$$\varepsilon(p) + \vec{p}\vec{v} + \frac{Mv^2}{2}, \quad (1.40)$$

где  $M$  – масса жидкости. Таким образом, появление возбуждения меняет первоначальную энергию жидкости  $\frac{Mv^2}{2}$ , причем добавка равна  $\varepsilon(p) + \vec{p}\vec{v}$ . Для того, чтобы такое возбуждение появилось, необходимо, чтобы общая энергия системы вместе с возбуждением не стала меньше, т.е.

$$\varepsilon(p) + \vec{p}\vec{v} < 0. \quad (1.41)$$

Эта величина имеет минимальное значение при антипараллельных скорости и импульсе. Таким образом, (1.41) можно переписать в условии

$$v > \frac{\varepsilon}{p}. \quad (1.42)$$

откуда получаем критерий сверхтекучести Ландау:

$$v > \left(\frac{\varepsilon}{p}\right)_{\min}. \quad (1.43)$$

Минимальному значению  $\varepsilon/p$  соответствует точка на кривой  $\varepsilon(p)$ , в которой

$$\frac{d\varepsilon}{dp} = \frac{\varepsilon}{p}, \quad (1.44)$$

т.е. точка, где прямая, проведенная из начала координат, касается кривой  $\varepsilon(p)$  (см. рис. 1.9, б). Производная  $d\varepsilon/dp$  есть скорость элементарного возбуждения, поэтому критерий Ландау (1.43) означает, что сверхтекучее движение может иметь место только, если скорость жидкости меньше скорости элементарного возбуждения в точках, удовлетворяющих (1.44). Как видно из рис. 1.9, б, критическая точка лежит правее ротонного минимума. Несложно оценить из спектра (1.35), что скорость сверхтекучего движения должна быть

$$v > \frac{1}{m^*} \left( \sqrt{p_0^2 + 2m^*\Delta} - p_0 \right) \Big|_{p_0^2 \gg 2m^*\Delta} = \frac{\Delta}{p_0}. \quad (1.45)$$

Рассмотрим качественную картину движения бозе-жидкости, когда выполняется критерий Ландау. При нулевой температуре возбуждения отсутствуют, и движение сверхтекучее. Как только  $T \neq 0$ , появляются возбуждения, которые сталкиваются со стенками капилляра и участвуют в вязком движении жидкости с диссипацией энергии. В таком движении участвует лишь часть массы жидкости. Дело в том, что движение газа возбуждений относительно жидкости сопровождается переносом массы. Пусть  $v$  – относительная скорость такого движения. Тогда импульс газа возбуждений в единице объема

$$\vec{P} = \int \vec{p}n(\varepsilon_p - \vec{p}\vec{v}) \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \Big|_{v \rightarrow 0} \approx -\frac{\vec{v}}{3} \int p^2 \frac{\partial n}{\partial \varepsilon} \frac{d^3p}{(2\pi)^3}. \quad (1.46)$$

Так как импульс пропорционален скорости, то происходит перенос массы (он и есть коэффициент пропорциональности). Оставшаяся часть массы жидкости будет по-прежнему двигаться без диссипации. Таким образом, как и было предложено в двухжидкостной модели, бозе-жидкость при  $T \neq 0$  представляет собой смесь двух жидкостей – сверхтекучей и нормальной, движущихся без трения друг относительно друга. Из (1.46) можно получить фононную и ротонную части нормальной плотности, если учесть, что  $P = mv = \rho Vv$ ,  $V = 1$ . Подставив линейный закон дисперсии (1.18) и бозе-распределение (1.19), а затем спектр ротонов (1.35) и распределение Больцмана в (1.46), получим:

$$\begin{aligned} \rho_{nf} &= \frac{2\pi^2 T^4}{45u^5}; \\ \rho_{nr} &= \frac{2\sqrt{m^*} p_0^4 e^{-\frac{\Delta}{T}}}{3(2\pi)^{\frac{3}{2}} \sqrt{T}}. \end{aligned} \quad (1.47)$$

Оставшаяся часть плотности  $\rho_s$  соответствует сверхтекучему движению. Итак, в сверхтекучей жидкости имеет место двухжидкостное движение с плотностью

$$\rho = \rho_n + \rho_s. \quad (1.48)$$

Следует отметить важное свойство: если жидкость помещена во вращающийся цилиндр, то нормальная часть будет увлечена стенками и станет вращаться с ним. Напротив, сверхтекучая часть будет покоиться, ее нельзя привести во вращение, так как движение сверхтекучей компоненты всегда потенциально. Это свойство можно записать математически:

$$\text{rot } \vec{v}_s = 0, \quad (1.49)$$

где  $\vec{v}_s$  – скорость сверхтекучей компоненты.

Двухкомпонентная гидродинамика бозе-жидкости во многом отличается от обычной гидродинамики. В бозе-жидкости могут происходить колебания двух различных типов с разными скоростями. Колебания первого типа – обычный звук, или первый звук, со скоростью  $u$ . В этом движении сверхтекучая и нормальная компоненты не разделяются и движутся как единое целое. Колебания второго типа – это так называемый *второй* звук, распространяющийся с другой скоростью  $u_2 = \sqrt{\rho_s T S^2 / \rho \rho_n C}$ , где  $S$  – энтропия,  $C$  – теплоемкость (при  $T \rightarrow 0$   $u_2 = u/\sqrt{3}$ ). В такой волне нормальная и сверхтекучая компоненты колеблются в противофазе, так что полный поток жидкости равен нулю:

$$\vec{j} = \rho_n \vec{v}_n + \rho_s \vec{v}_s = 0. \quad (1.50)$$

### 1.7. Квантование циркуляции и топологические вихри. Эффект Хесса – Фейрбенка

Богатство физических явлений в этой квантовой системе <sup>4</sup>Не далеко не исчерпывается упомянутыми выше эффектами. Достаточно подробное объяснение многих экспериментов с точки зрения двухжидкостной модели см., например, в [16]. Здесь не были рассмотрены эффекты – аналоги эффекта Джозефсона в сверхпроводниках, эксперименты в сверхжидкостной аэродинамической трубе, экспериментальное наблюдение

вихрей, особенности протекания по тонким капиллярам, распространение звука и др.

Рассмотрим интересное явление *квантования циркуляции* в сверхтекучем гелии и важные физические следствия из него.

Возьмем волновую функцию конденсата в виде

$$\Psi(r) = \Psi_0 e^{iS(r)}, \quad (1.51)$$

где  $S(r)$  – фаза, вещественная функция радиуса-вектора, а  $|\Psi_0|^2$  – плотность конденсата (сверхтекучей части), при этом считаем, что она постоянна и будем пренебрегать ее флуктуациями. Тогда оператор плотности потока массы

$$j_s = \frac{1}{2} [\Psi^* \hat{p} \Psi + \Psi (\hat{p} \Psi^*)] = \hbar |\Psi|^2 \nabla S. \quad (1.52)$$

Пусть гелий-II заполняет кольцевую область – пространство между двумя цилиндрами (рис. 1.10).

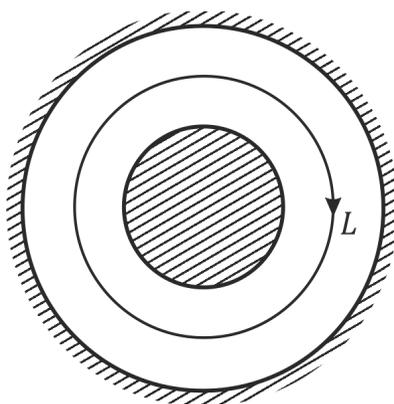


Рис. 1.10. Сверхтекучая жидкость в кольцевой (многосвязной области).  
Контур  $L$  полностью находится в сверхтекучей жидкости

Рассмотрим циркуляцию сверхтекучей скорости:

$$\kappa = \oint \vec{v}_s d\vec{l};$$

$$\vec{v}_s = \frac{\hbar}{M} \nabla S. \quad (1.53)$$

Выразим ее через фазу:

$$\kappa = \frac{\hbar}{M} \oint \nabla S d\vec{l}. \quad (1.54)$$

Для окружности  $L$  (см. рис. 1.10) легко получить, что

$$\kappa = \frac{\hbar}{M} (\Delta S)_L. \quad (1.55)$$

Для однозначности волновой функции при полном обходе контура  $L$  необходимо, чтобы значение фазы менялось на величину, кратную  $2\pi$ , т.е. циркуляция квантуется:

$$\kappa = \frac{2\pi\hbar}{M} n \equiv \frac{h}{M} n, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (1.56)$$

Таким образом, квант циркуляции – величина  $h/M$ , для  ${}^4\text{He}$  она равна  $9.98 \times 10^{-8} \text{ м}^2/\text{с}$ . Впервые квантование циркуляции экспериментально наблюдал Вайен [17].

Выражение для квантования циркуляции (1.56) справедливо для любого контура, который можно непрерывно деформировать в  $L$ , не выходя за границы жидкости. Кольцевая область представляет собой пример многосвязной области, т.е. любого «отверстия» в массиве сверхтекучей жидкости, куда она не может проникать. Такие области могут быть созданы двумя способами. Во-первых, они могут искусственно создаваться твердыми поверхностями, т.е. конфигурацией сосудов для гелия. Во-вторых, при вращении гелия в сверхтекучей жидкости спонтанно могут возникнуть цилиндрические отверстия, вокруг которых возникают устойчивые потоки. В этих случаях фактически можно наблюдать возникновение вихревых линий (нитей) (рис. 1.11), подобных вихрям в сверхпроводниках второго рода.

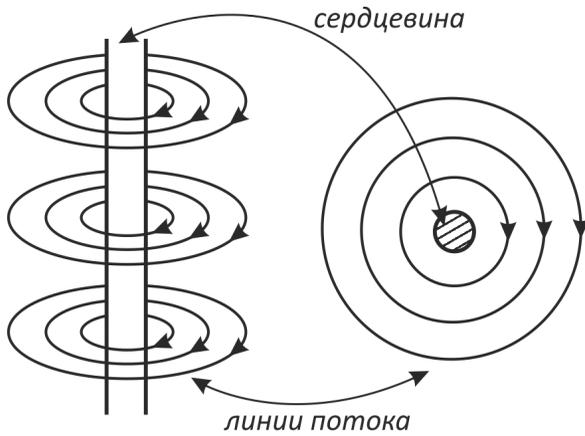


Рис. 1.11. Вихревая нить в гелии-II

Согласно двухжидкостной модели, сверхтекучую компоненту невозможно привести во вращение, так как сверхтекучий поток должен характеризоваться условием отсутствия вихрей

$$\text{rot } \vec{v}_s = 0. \quad (1.57)$$

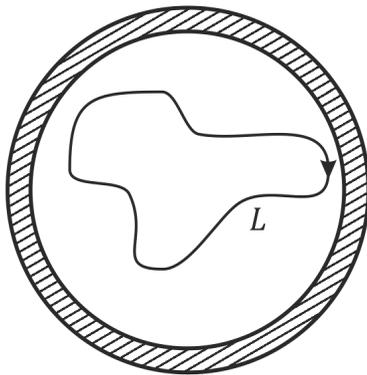


Рис. 1.12. Сверхтекучая жидкость в цилиндрическом сосуде. Контур  $L$  в односвязной области можно свести в точку

Действительно, рассмотрим заключенный в сосуд гелий-II (рис. 1.12) и найдем циркуляцию по любому замкнутому контуру  $L$ :

$$\kappa = \oint_L \vec{v}_s d\vec{l} = \text{rot } \vec{v}_s d\vec{S} = 0. \quad (1.58)$$

Здесь учтена теорема Стокса при переходе из контурного в поверхностный интеграл и использовано условие (1.57). Это означает, что циркуляция по любому контуру в сплошной сверхтекучей жидкости равна нулю. Любой контур в сплошной, односвязной жидкости можно стянуть в точку, т.е. условие (1.58) справедливо для любой точки жидкости. Но тогда, согласно контурному интегралу в (1.58), в каждой точке скорость  $\vec{v}_s = 0$ , и вращение невозможно. Эксперимент Андроникашвили [12] с вращающимися дисками также указывал на это, дисками увлекалась только нормальная компонента. Но в экспериментах Осборна [18] вращался цилиндрический сосуд с гелием-II, и было замечено, что мениск у стенок сосуда имеет ту же форму, как и у обыкновенной несверхтекучей жидкости, вращающейся как целое. Таким образом, и нормальная, и сверхтекучая компоненты гелия вращались с одной и той же угловой скоростью.

Можно было бы заключить, что сверхтекучести во вращающемся гелии нет. Для проверки этого Андроникашвили и Каверкин провели эксперимент по эффекту фонтанирования во вращающемся гелии-II [19] и показали, что эффект сохраняется. Только при достаточно большой критической скорости (согласно критерию Ландау) сверхтекучесть разрушается.

Альтернативное, и как оказалось, правильное объяснение состоит в том, что при вращении сверхтекучая компонента пронизана рядом вихревых нитей (рис. 1.13).

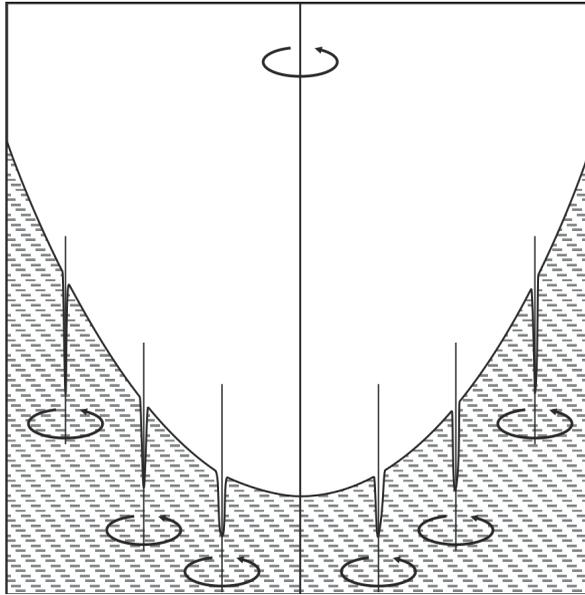


Рис. 1.13. Расположение вихревых нитей во вращающемся гелии-II

Как и в случае квантования циркуляции вокруг «отверстия», из которого вытеснена сверхтекучая жидкость, так и здесь вокруг вихревых нитей происходит квантование циркуляции, т.е.

$$\kappa = \oint_L \vec{v}_s d\vec{l} = \text{rot } \vec{v}_s d\vec{S} = \frac{h}{M} n. \quad (1.59)$$

Из этого соотношения следует, что в некоторых точках области, ограниченной контуром  $L$ , ротор скорости отличен от нуля. Это – малая область внутри нити – сердцевина вихря, в которой  $\text{rot } \vec{v}_s \neq 0$ , и в которой плотность сверхтекучей компоненты стремится к нулю.

Вихревая нить в сверхтекучей жидкости является полным аналогом вихревой нити в сверхпроводниках второго рода, существующих между первым и вторым критическими магнитными полями.

Рассмотрим структуру такой нити (рис. 1.14). Она должна быть окружена кольцевым потоком жидкости (для простоты при рассмотрении пренебрежем нормальной компонентой).

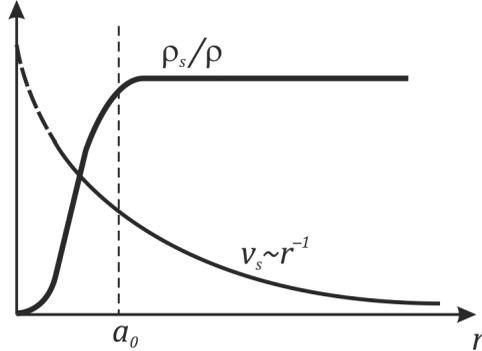


Рис. 1.14. Зависимости  $v_s$  и  $\rho_s/\rho$  от расстояния  $r$  вихревой нити от оси;  $a_0$  – радиус сердцевины

Очевидно, что имеет место цилиндрическая геометрия, и скорость сверхтекучей компоненты должна зависеть только от расстояния до вихревой нити. Рассчитаем, как линейная скорость потока меняется с расстоянием от оси, и вычислим циркуляцию для контура, равного окружности радиусом  $r$ :

$$\kappa = \oint_L \vec{v}_s d\vec{l} = 2\pi r v_s(r) = \frac{h}{M} n, \quad (1.60)$$

откуда находим

$$v_s(r) = \frac{h}{2\pi r M} n \equiv \frac{\kappa}{2\pi r}. \quad (1.61)$$

Итак, скорость спадает обратно расстоянию, как и в случае вихревого образования в обычной жидкости. Отличие – в наличии квантования. Момент количества движения также квантуется, причем в единицах постоянной Планка:

$$M r v_s(r) = n h. \quad (1.62)$$

Вблизи сердцевины вихря скорость, согласно (1.61), должна расходиться. В действительности она возрастает до некоторого предела, близкого к критическому значению, согласно критерию сверхтекучести. Описание вблизи сердцевины следует проводить аналогично описанию вихря Абрикосова в сверхпроводниках. Можно рассчитать далее энергию вихря  $\varepsilon_1$  и энергию взаимодействия между парой вихрей  $\varepsilon_{12}$  [16, 20]. Энергия одиночного вихря равна кинетической энергии циркулирующей жидкости в пренебрежении поправками на искажение волновой функции в сердцевине вихря:

$$\varepsilon_1 = \int_a^b \pi \rho_s v_s^2 r dr = \frac{\rho_s \kappa^2}{4\pi} \ln \frac{b}{a}. \quad (1.63)$$

Здесь  $a$  – радиус сердцевины вихря,  $b$  – величина порядка среднего расстояния между вихрями, а сама энергия – энергия нити, приходящаяся на единицу ее длины. Расчет межвихревого взаимодействия приводит к выводу, что вихри отталкиваются, как и следовало ожидать для двух вихревых трубок потока, закрученных в одну сторону.

Вернемся к опытам Осборна [18] с вращающимся сосудом с гелием-II. Пусть вихри расположены равномерно по площади сосуда с плотностью  $n_v$  (см. рис. 1.13) и все они параллельны оси вращения. Полная циркуляция системы вихрей на единицу площади равна

$$K = n_v \kappa. \quad (1.64)$$

Расчет свободной энергии системы вихрей [16] приводит к выводу, что ее минимум (основное состояние гелия-II) достигается при правильной конфигурации вихрей, каждый из которых имеет наименьшую из возможных циркуляцию  $h/M$ ; т.е. число вихревых нитей максимально. Действительно, полную циркуляцию можно, согласно соотношению (1.59), трактовать как среднее значение величины  $\text{rot } \vec{v}_s$ . Полная циркуляция в сосуде по контуру радиусом  $R$  с центром на оси сосуда равна  $\pi R^2 n_v \kappa$ .

С другой стороны, для объяснения эксперимента Осборна необходимо, чтобы сверхтекучая компонента вращалась как целое с угловой скоростью сосуда  $\Omega$ . Тогда ее полная циркуляция должна быть равна  $2\pi R^2\Omega$ . Сравнивая эти величины, получим для концентрации вихрей и циркуляции на единицу площади:

$$n_v = \frac{2\Omega}{\kappa};$$

$$K = \langle \text{rot } \vec{v}_s \rangle = 2\Omega. \quad (1.65)$$

Таким образом, число вихрей и расстояние между ними напрямую зависит от величины циркуляции на каждом вихре  $\kappa$ . Докажем, что минимум энергии достигается конфигурацией из многих вихрей с малыми циркуляциями, а не конфигурацией с одной нитью и максимальной циркуляцией. Минимизировать следует величину

$$F' = F - \vec{L}\Omega. \quad (1.66)$$

Здесь  $F$  – свободная энергия вращающейся жидкости,  $L$  – полный момент количества движения. Полное число вихревых нитей сосуда радиусом  $R$  с циркуляцией в каждой нити  $\kappa$  равно

$$N = \pi R^2 n_v = \frac{2\pi R^2 \Omega}{\kappa}. \quad (1.67)$$

В выражении для свободной энергии следует выделить слагаемые, зависящие только от  $N$  и  $\kappa$ . Тогда система, включающая в себя одинаковые нити, каждая из которых обладает энергией  $\varepsilon_1$  и моментом количества движения  $l_v$ , имеет энергию

$$\Delta F = N(\varepsilon_1 - l_v \Omega). \quad (1.68)$$

Минимизируя это выражение, находим [16]:

$$\vec{l}_v = \frac{\rho_s \kappa}{8\pi\Omega} \vec{\kappa}. \quad (1.69)$$

Тогда

$$\Delta F = \frac{1}{2} \rho_s R^2 \Omega \kappa \left[ \ln \frac{b}{a} - \frac{1}{2} \right]. \quad (1.70)$$

Анализируя это выражение относительно  $k$ , видим, что энергия  $\Delta F$  должна принимать свое минимальное значение для минимизации энергии. Поэтому система вихрей должна иметь максимальную плотность при минимальной циркуляции каждого вихря  $h/M$ .

Равновесная конфигурация есть треугольная решетка (рис. 1.15), вращающаяся с той же угловой скоростью  $\Omega$ , что и сосуд.

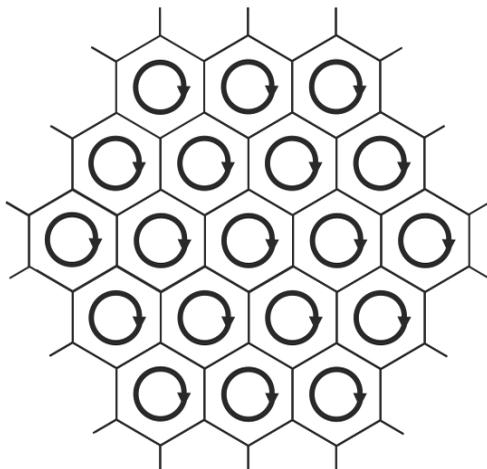


Рис. 1.15. Картина потока, состоящего из плотноупакованных вихревых нитей. Сплошными линиями обозначено направление течения потока; штриховыми – линии, отвечающие нулевой скорости во вращающейся системе координат

Расчет максимальной угловой скорости, при которой может появиться хотя бы один вихрь (аналог первого критического поля  $H_{c1}$  в сверхпроводниках), можно упрощенно описать следующим образом. Во вращающейся жидкости может образоваться вихревая нить, если ее возникновение приводит к уменьшению свободной энергии. Это произойдет, когда величина  $\varepsilon_1(R) - l_v(R)\Omega$  станет отрицательной. Из-за того, что вихрь – единственный, в зависимости энергии и момента количества движения вихря от  $R$  следует заменить параметр  $b$  на  $R$ . Соответственно, для уединенного вихря

$$\varepsilon_1(R) = \frac{\rho_s \kappa^2}{4\pi} \ln \frac{R}{a};$$

$$l_v(R) = \int_a^R \rho_s r v_s(r) 2\pi r dr \Big|_{R \gg a} = \frac{1}{2} \rho_s \kappa R^2. \quad (1.71)$$

Отсюда находим критическую угловую скорость:

$$\Omega_{c1} = \frac{\hbar}{MR^2} \ln \frac{R}{a}. \quad (1.72)$$

Оценим эту величину. Если  $R = 1$  см, то  $\Omega_{c1} = 0.01$  с<sup>-1</sup>. Первая критическая скорость мала, и при угловой скорости  $\Omega > \Omega_{c1}$  возникают вихри.

При низких угловых скоростях  $\Omega < \Omega_{c1}$  можно наблюдать безвихревое движение сверхтекучей жидкости. Это состояние наблюдали Хесс и Фейрбенк [21]. Оно аналогично мейсснеровскому состоянию в сверхпроводниках при полях ниже первого критического  $H_{c1}$ . Кроме того, Хесс и Фейрбенк наблюдали процесс проникновения вихрей во вращающийся гелий-II при постепенном увеличении угловой скорости, начиная с  $\Omega > \Omega_{c1}$ .

Момент количества движения сверхтекучей жидкости в эксперименте измерялся по изменению момента количества движения при подогревании жидкости до критической температуры при заданной угловой скорости, когда вся жидкость переходила в нормальное состояние и начинала твердотельное вращение. Пороговое значение угловой скорости, выше которого возникает вращение сверхтекучей жидкости, близко к значению (1.72).

Можно также рассчитать скорость, при которой появляются второй, третий, четвертый и так далее вихри, причем при таком процессе зависимость числа вихрей (или суммарного момента количества движения системы) от угловой скорости имеет

ступенчатую форму. Этот эффект Хесса – Фейрбенка наблюдали Паккард и Сандерс [22], применившие для определения числа вихревых нитей эффект захвата электронов сердцевинами вихрей (рис. 1.16). Анализ эффекта Хесса – Фейрбенка в одномерном случае приведен в прил. 1.

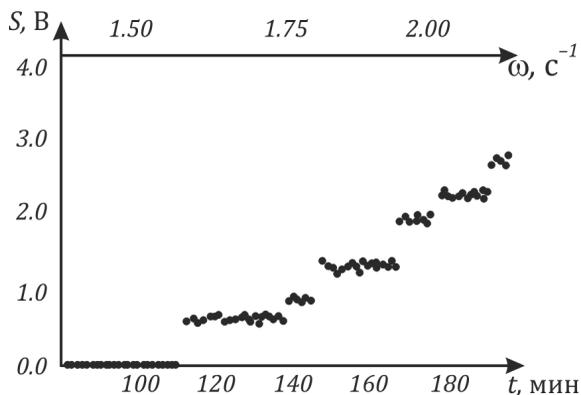


Рис. 1.16. Ступенчатая структура, связанная с образованием одиночных вихрей во вращающемся с небольшим ускорением гелии-II. Количество вихрей определяется по числу захваченных сердцевинами вихрей электронов, пропускаемых через жидкость. Захваченные электроны извлекаются затем из вихрей электрическим полем, приложенным вдоль сердцевин. Заряд, накапливающийся на выходе, и, соответственно, сигнал  $S$  на выходе электрометра пропорциональны количеству вихрей

Фактически в этом эксперименте наблюдается *квантование момента количества движения* вращающегося бозе-конденсата.

При дальнейшем увеличении скорости плотность вихрей растет, и предельная скорость, при которой исчезает сверхтекучесть, определяется из условия перекрытия сердцевин вихрей, которое легко оценить из первого из выражений в (1.65):

$$\Omega_{c2} = \frac{\hbar}{Ma^2}. \quad (1.73)$$

Оценка дает большую величину  $\sim 10^{12} \text{ с}^{-1}$ . Практически это значение (аналог верхнего критического магнитного поля  $H_{c2}$  в сверхпроводниках) экспериментально недостижимо.

Динамика вихревых нитей, наблюдение их упругих свойств, движение, переацепление, взаимодействие их с дефектами, стенками сосудов, с ротонами – вихревыми возбуждениями над основным состоянием – самостоятельная область физики сверхтекучего гелия. Развилась целая экспериментальная область по наблюдению этих топологических образований в объеме сверхтекучей жидкости с помощью рассеяния электронов, заряженных ионов во внешнем поле и многих других методик. Иногда эти вихри называют именно *топологическими*, в отличие от реальных вихревых образований в гелии – ротоннов.

## Приложение 1. Анализ эффекта Хесса – Фейрбенка (Hess – Fairbank) в одномерном случае

Эффект Хесса – Фейрбенка (изменение вращательного момента системы отдельными квантами, в отличие от макроскопического квантования, при котором величина скачка пропорциональна количеству частиц) поддается подробному аналитическому исследованию в специальном случае одномерной геометрии.

Рассмотрим газ бозонов, помещенный в сосуд в виде тонкого кольца. Низкая температура и малая плотность газа позволяют пренебречь поперечным движением, и геометрия становится эффективно одномерной.

Гамильтониан системы во вращающемся сосуде можно записать в виде

$$H = \hbar\omega_c \sum_k \left(k - \frac{\omega}{2\omega_c}\right)^2 n_k + \frac{g}{2} \sum_{klq} a_k^+ a_l^+ a_{l-q} a_{k+q}, \quad (\text{П1.1})$$

где  $\omega$  – угловая скорость вращения сосуда;  $\omega_c = \hbar/2MR^2$  – критическая угловая скорость;  $g = \frac{2a_s\hbar^2}{MRS} < 0$  – эффективная амплитуда взаимодействия бозонов;  $M$  – масса бозе-атома;  $S = \pi r^2$  – площадь поперечного сечения тора.

Функционал Гросса – Питаевского, описывающий энергию конденсата, имеет вид

$$\frac{E}{N} = -\frac{\hbar^2}{2M} \int \psi^*(x) \left( \frac{d}{dx} - \frac{\omega}{2\omega_c} \right)^2 \psi(x) dx + \frac{UN}{2} \int |\psi(x)|^4. \quad (\text{П1.2})$$

Далее для упрощения формул будем полагать, что  $\hbar \equiv 1$ ,  $2M \equiv 1$ ,  $R = 1$ . Тогда макроскопические характеристики системы будут определяться только безразмерным параметром взаимодействия

$$\gamma \equiv \frac{|g|(N-1)}{\hbar\omega_c}, \quad (\text{П1.3})$$

и координата  $x$  будет оставаться в промежутке от 0 до  $2\pi$ .

Прежде всего отметим особенность данной системы, необходимую для возникновения эффекта – притягивающее взаимодействие между бозонами (например, отрицательная длина  $s$ -рассеяния наблюдается у бозе-изотопа Li, а также может быть получена искусственно вблизи резонанса Фешбаха у других изотопов щелочных металлов в магнитном поле подходящей величины (см. работу [23])). В то время как в плоской и объемной геометрии “облако” притягивающихся бозонов неустойчиво по отношению к сжатию, при котором происходит коллапс и разрушение конденсата [24], одномерная система вполне стабильна при обоих знаках взаимодействия.

Более того, только в случае притяжения на графике  $M(\omega)$  возможно появление наклонного участка, приводящего к постепенному изменению общего момента системы в виде эффекта Хесса – Фейрбенка. Отталкивание, наоборот, дает тривиальную ступенчатую зависимость без наклонных участков и со степенями макроскопического квантования  $M_k = kN$ .

Особенности поведения системы удобно пояснить на языке волновой функции конденсата. Основное состояние такой системы при любом значении  $\omega$  дается однородной функцией  $\Psi(x) = Ae^{ikx}$  ( $k$  – целое число, отвечающее минимуму энергии  $E_k = \left(k - \frac{\omega}{2\omega_c}\right)^2$ ). Любое локальное изменение ее модуля (можно сказать, “уплотнение” в некоторой области) невыгодно, так как приведет к увеличению одновременно и кинетической, и потенциальной энергий.

Неоднородное решение, однако, может оказаться выгодней однородного в случае притягивающего взаимодействия. Очевидно, что чем больше сила притяжения, тем меньше будет размер такого “сгустка”. Это позволяет рассмотреть случай большого взаимодействия в приближении, игнорирующем конечность размеров сосуда. Для соответствующего функционалу (П1.2) нелинейного уравнения на одномерной оси

$$-\frac{d^2}{dx^2}\psi(x) - 2\pi\gamma\psi(x) - \mu\psi(x) = 0 \quad (\text{П1.4})$$

известно решение с минимальной энергией – солитон Хасимото [25]:

$$\psi_0(x) = \frac{\sqrt{\frac{\pi\gamma}{4}}}{\text{th}\left(\frac{\pi\gamma(x-x_0)}{2}\right)}. \quad (\text{П1.5})$$

Этот солитон сосредоточен в некоторой ограниченной области, и сравнивая его размер с размером тороидального сосуда в рассматриваемой задаче, получается оценка для величины взаимодействия, выше которой можно ожидать конденсацию в состоянии с волновой функцией-солитоном:

$$\gamma \gg 1. \quad (\text{П1.6})$$

Такая “капля” может реагировать на вращение сосуда, так как имеет степень свободы – координату своего центра, в отличие от однородного конденсата  $e^{ikx}$ , жестко ограниченного условием

квантования фазы  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ . Таким образом, теперь изменение вращательного момента на одиночный квант возможно и обеспечивается движением конденсатной “капли” по сосуду.

Здесь важно заметить, что такое локализованное состояние, тем не менее, является единым конденсатом. Все бозоны занимают одно состояние, комбинирующее исходные одночастичные состояния.

Анализ устойчивости однородного основного состояния по отношению к возникновению малой локальной неоднородности дает максимальную скорость вращения сосуда в зависимости от  $\gamma$ :

$$\left(2k - \frac{\omega}{2\omega_c}\right)^2 = 1 - 2\gamma. \quad (\text{П1.7})$$

До достижения этого значения состояние системы остается однородным и полный момент системы отвечает макроскопическому квантованию  $M = kN$ . После возникновения неоднородности появляется возможность плавного изменения момента одиночными квантами – эффект Хесса – Фейрбенка.

Численное решение уравнения Гросса – Питаевского (П1.4) подтверждает эти рассуждения при произвольных  $\omega$  и  $\gamma$  (подробности приведены в работе [26]). На рис. П1.1 показана зависимость  $M(\omega)$ , рассчитанная для  $\gamma = 0.45$ . Видны наклонные участки, соответствующие эффекту Хесса – Фейрбенка. Размеры горизонтальных плато подчиняются соотношению

$$\Psi(x) = A + B e^{ix}, B \ll A. \quad (\text{П1.8})$$

Как можно пользоваться волновой функцией макроскопического состояния ( $N \rightarrow \infty$ ) для исследования микроскопического квантования (явления порядка  $1/N$ ), каким является эффект Хесса – Фейрбенка? Ответ достаточно прост. Уравнение Гросса – Питаевского получено в приближении, позволяющем правильно описывать поведение макроскопической системы и

игнорирующем слагаемые порядка  $1/N$ . Ступеньки в эффекте Хесса – Фейрбенка представляют собой именно эти поправки порядка  $1/N$ , в то же время границы эффекта подчиняются закономерностям “большой” системы.

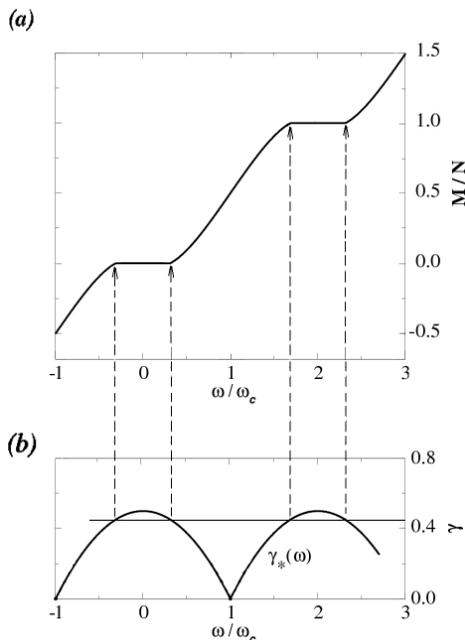


Рис. П1.1. Результат численного решения уравнения Гросса – Питаевского для  $\gamma = 0.45$  (a). Зависимость момента системы от скорости вращения  $\omega$ .

Видны горизонтальные и наклонные участки, соответствующие макроскопическому квантованию и эффекту Хесса – Фейрбенка. Фазовая диаграмма эффекта – зависимость граничного значения взаимодействия от скорости вращения (b). При  $\gamma < \gamma_*$  основное состояние системы однородно ( $\Psi(x) \sim e^{ikx}$ ), в противном случае неоднородно и будет наблюдаться эффект Хесса – Фейрбенка. Для  $\gamma = 0.45$  (отмечено горизонтальной прямой) стрелками показано соответствие точек графика границам плато на рисунке (a)

Таким образом, чтобы получить ступеньки, уравнения Гросса – Питаевского недостаточно и нужно рассматривать реальное многочастичное состояние системы.

Интересно, что для этой задачи известно аналитическое выражение для точного основного состояния. По структуре оно аналогично задаче об одной частице в дельта-функциональном потенциале:

$$\Psi_0(x_1, x_2, \dots) = \prod_{i < j} e^{-\lambda|x_i - x_j|}. \quad (\text{П1.9})$$

Данное состояние не имеет максимума с определенной координатой (в выражении участвуют только относительные координаты – расстояния между частицами). Тем не менее, положения частиц скоррелированы между собой – вероятность найти две частицы на малом расстоянии больше, чем вдали друг от друга.

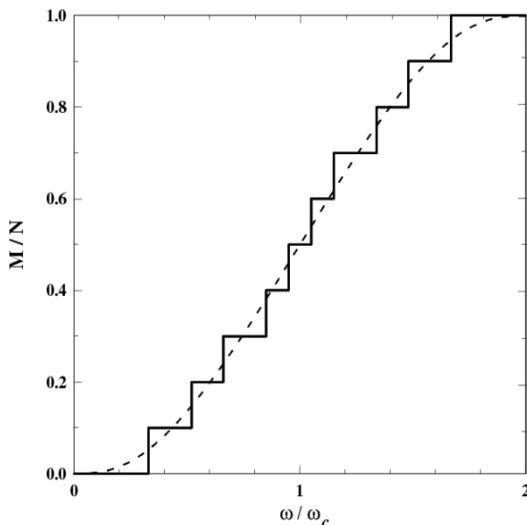


Рис. П1.2. Ступени микроскопического квантования для системы  $N = 10$  бозонов, рассчитанные при помощи квантового метода Монте-Карло [26]. Величина взаимодействия  $\gamma = 0.5$

Решение (П1.9) мало пригодно для подробного исследования системы. Более удобны квантовые методы Монте-Карло [26]. На рис. П1.2 – П1.4 приведены результаты расчета основного состояния исследуемой системы для 10, 20 и 40 бозонов при различных параметрах взаимодействия и скорости вращения сосуда.

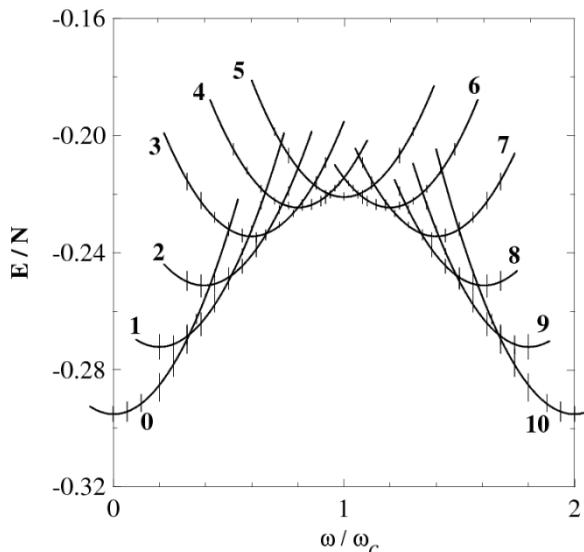


Рис. П1.3. Иллюстрация к определению ступеней микроскопического квантования для системы  $N = 10$  бозонов: показаны (цифрами у графиков) рассчитанные ветви минимальных энергий для различных моментов вращения [26]. При увеличении скорости вращения сосуда основным состоянием становится следующая ветвь с другим моментом и на графике  $M(\omega)$  появляется следующая ступень. Вертикальные штрихи отмечают погрешность рассчитанных значений. Величина взаимодействия  $\gamma = 0.5$

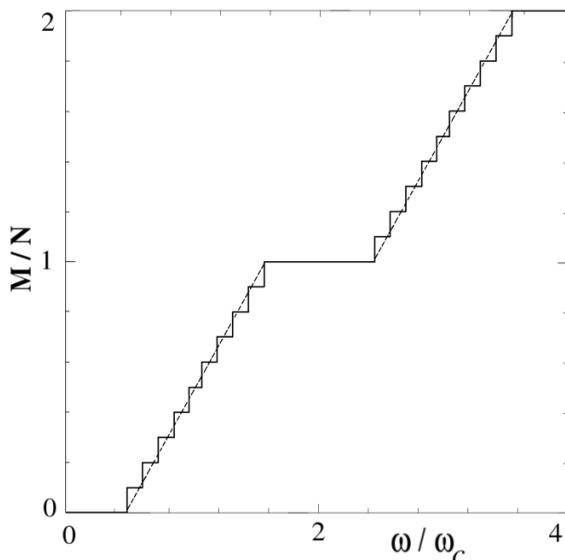


Рис. П1.4. Эффект Хесса – Фейрбенка для системы из  $N = 10$  бозонов на протяжении двух периодов макроскопического квантования. Величина взаимодействия  $\gamma = 0.2$

В заключение приведем график (рис. П1.5), рассчитанный для нескольких систем, состоящих из различного количества частиц (5, 10, 20). Следует отметить, насколько точно следует первая ступенька эффекта за границей, которую ей определила волновая функция конденсата.

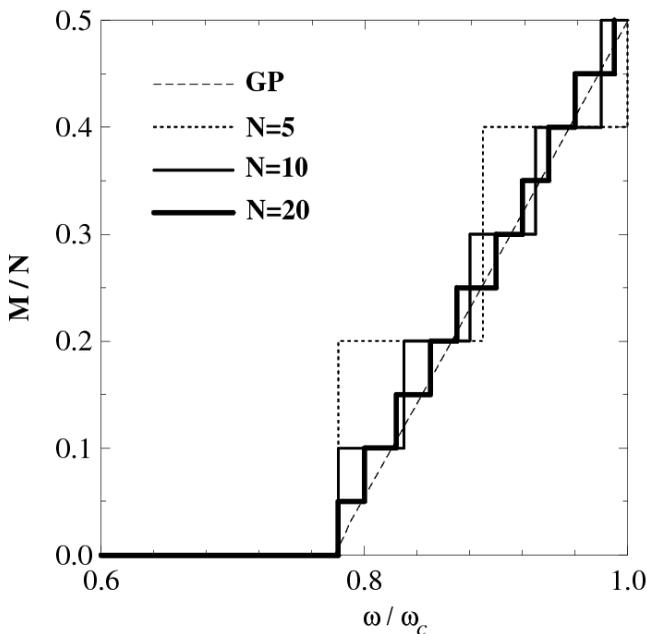


Рис. П1.5. Ступени квантования, рассчитанные для 5, 10, 20 бозонов. Показана первая половина периода. Величина взаимодействия  $\gamma = 0.2$

### 1.8. Изотоп $^3\text{He}$ – сверхтекучая ферми-жидкость. Диаграмма состояний. Возможный ферромагнитный переход. Энтропия жидкости и твердого состояния

Более редкий изотоп гелия –  $^3\text{He}$  стал доступен для исследования в физике низких температур после Второй Мировой войны как побочный продукт программ по созданию ядерного оружия. Он образуется при радиоактивном бета-распаде трития с периодом полураспада 12 лет. Первые исследования жидкого  $^3\text{He}$  были выполнены в США в 1959 г.

$^3\text{He}$  является *квантовой жидкостью*, а в твердом состоянии – *квантовым кристаллом*, как и изотоп  $^4\text{He}$  (параметр де Бюра  $\Lambda_{^4\text{He}} \sim 2.7$ , см. (1.1)). Достаточно посмотреть на фазовую диаграмму  $^3\text{He}$  (см. рис. 1.1) и увидеть как обилие структурных фазовых переходов при изменении давления и температуры, так и наличие твердой фазы при давлении не менее 30 атмосфер.

В конце 60-х годов как в США, так и в СССР работы по ожижению различных газов щедро финансировались в рамках проектов по термоядерному синтезу, ракетным и кислородно-водородным двигателям с криогенным топливом и др. Аномалии в поведении жидкого  $^3\text{He}$  впервые были замечены еще в 1963 г. в низкотемпературной лаборатории Корнелльского университета в США (N.V. Ithaca), однако они не были осмыслены и изучены как новый фазовый переход. Только в 1972 г. были получены убедительные доказательства существования сверхтекучести в  $^3\text{He}$ .

Для достижения наиболее интересной для  $^3\text{He}$  области температур порядка нескольких милликельвин применяются криостаты (рефрижераторы) растворения – приборы, которые используют ненулевую ( $\sim 6\%$ ) растворимость жидкого  $^3\text{He}$  в сверхтекучем  $^4\text{He}$  при низких температурах, для своеобразного его «выпаривания», а точнее расширения в объеме  $^4\text{He}$  для еще большего понижения температуры. Удастся достичь температур порядка 10 – 15 мК.

Основной интерес исследователей изначально был связан не с жидким ( $T_{\text{кип}} = 3.19\text{ К}$ ), а с твердым состоянием  $^3\text{He}$ , и причина – именно в фермиевской статистике и некомпенсированном ядерном спине  $\mu_{\text{я}}$  атомов этого вещества. Поскольку ядерные моменты очень малы, ожидалось, что магнитное упорядочение в твердом  $^3\text{He}$  будет происходить только при очень низких температурах. Обнаружение этого ферромагнитного фазового перехода и являлось первичной целью исследования  $^3\text{He}$  (этот

переход позднее и был обнаружен при температуре в 1 мК Ричардсоном с соавторами [27]). Значит, при  $T > 0.01$  К ядерные спины атомов в кристалле должны быть полностью разупорядочены, для спина  $1/2$  это означает, что энтропия (мера хаотичности системы)  $S$  должна равняться

$$S = \ln W = N \ln 2, \quad (1.74)$$

где  $W = 2^N$  – статистический вес системы;  $N$  – число атомов. С другой стороны, как типичная ферми-жидкость, жидкий  ${}^3\text{He}$  подчиняется статистике Ферми – Дирака. Отклонение от классического поведения начинается примерно при температуре, когда тепловая длина волны де Бройля становится сравнима со средним расстоянием между частицами. Для жидкого  ${}^3\text{He}$  оценки дают температуру  $\sim 1$  К. Значительно ниже этого значения как теплоемкость, так и энтропия, согласно теории ферми-жидкости, будут линейными функциями температуры, т.е.  $S = \gamma T$ .

### **1.9. Уравнение Клаузиуса – Клапейрона. Эффект Померанчука. Кривая плавления. Магнитная восприимчивость. Фазовая диаграмма. Три сверхтекучие фазы**

Какие же следствия могут иметь соображения об энтропии для кривой равновесия жидкой и твердой фаз  $P(T)$ , определяемой знаменитым уравнением Клаузиуса – Клапейрона?

Условие равновесия фаз в точке фазового перехода первого рода определяется равенством температур, давлений и химических потенциалов

$$\begin{aligned} T_1 &= T_2; \\ P_1 &= P_2; \\ \mu_1 &= \mu_2. \end{aligned} \quad (1.75)$$

Последнее равенство рассмотрим подробнее, учитывая, что химический потенциал сам является функцией давления и температуры:

$$\mu_1(P, T) = \mu_2(P, T). \quad (1.76)$$

Продифференцируем его:

$$\frac{\partial \mu_1}{\partial T} + \frac{\partial \mu_1}{\partial P} \frac{dP}{dT} = \frac{\partial \mu_2}{\partial T} + \frac{\partial \mu_2}{\partial P} \frac{dP}{dT}. \quad (1.77)$$

Выражая энтропию и объем через термодинамические соотношения

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \mu}{\partial T}\right)_P &= -S; \\ \left(\frac{\partial \mu}{\partial P}\right)_T &= V, \end{aligned} \quad (1.78)$$

находим:

$$\begin{aligned} -S_1 + V_1 \frac{dP}{dT} &= -S_2 + V_2 \frac{dP}{dT} \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{dP}{dT} &= \frac{S_1 - S_2}{V_1 - V_2} = \frac{Q}{T(V_1 - V_2)}; \\ Q &= T(S_1 - S_2), \end{aligned} \quad (1.79)$$

где  $Q$  – скрытая теплота плавления.

Согласно этой формуле, наклон кривой плавления равен

$$\frac{dP}{dT} = \frac{S_{liquid} - S_{solid}}{V_{liquid} - V_{solid}} = \frac{Q}{T(V_{liquid} - V_{solid})}. \quad (1.80)$$

Для  ${}^3\text{He}$   $V_{liquid}$  всегда больше, чем  $V_{solid}$ , так что знаменатель всегда положителен. С другой стороны, числитель меняет знак при охлаждении в области вырождения Ферми, так как  $S_{liquid} = \gamma T$  становится меньше, чем постоянная энтропия твердой фазы  $S_{solid} = N \ln 2$ . Поэтому при низких температурах наклон кривой плавления становится *отрицательным* (рис. 1.17). Более того, в этом режиме отрицательной становится скрытая теплота плавления, т.е. чтобы заморозить жидкий  ${}^3\text{He}$ , надо к нему

подвести тепло (!) – это так называемый *эффект Померанчука* (предсказанный российским теоретиком в 1950 г. [28]).

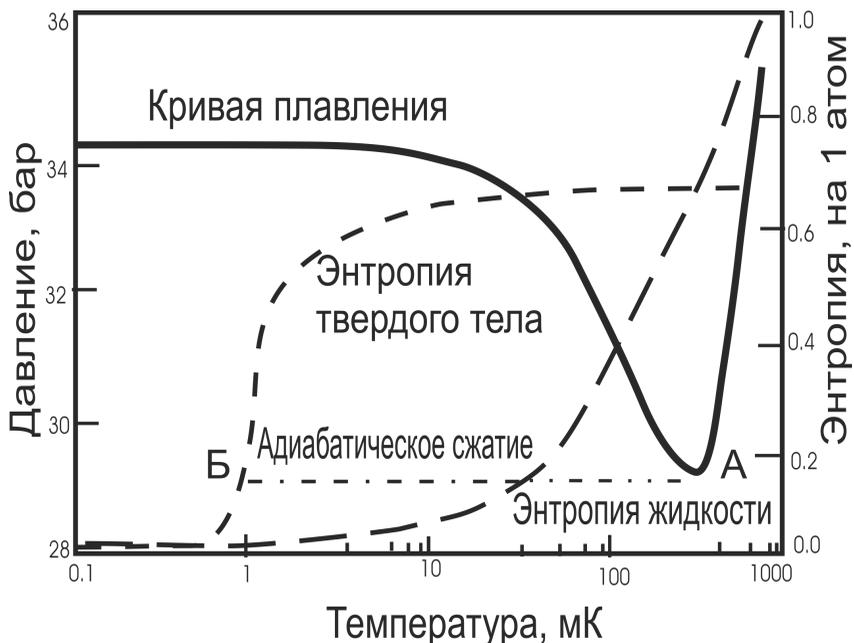


Рис. 1.17. Кривая плавления  $P(T)$  в  $^3\text{He}$ . Минимум кривой при 0.32 К и 29.3 бар. Показаны также зависимости энтропии жидкого и твердого  $^3\text{He}$ . Две энтропийные кривые пересекаются точно в минимуме кривой плавления. Резкое возрастание энтропии твердого тела при 1 мК связано с ферромагнитным упорядочением в кристалле. Штриховая линия – путь адиабатического сжатия из жидкости в кристалл (*охлаждение Померанчука*)

Итак, согласно эффекту Померанчука, твердая фаза должна собираться в самом теплом месте криостата. Как правило, использовалось адиабатическое сжатие, которое переводило систему из точки А в точку В на рис. 1.17, что позволяло достичь диапазона температур  $\sim 1$  мК. Криоячейка (криостат специальной

конструкции) для адиабатического сжатия называется *ячейкой Померанчука* (рис. 1.18).

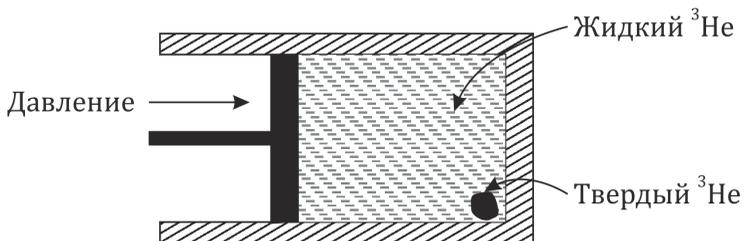


Рис. 1.18. Способ Померанчука для охлаждения тающего  $^3\text{He}$ . Твердая фаза при низких температурах имеет большую энтропию, чем жидкая. При сжатии смеси жидкость – твердое тело от жидкой фазы отводится тепло по мере образования кристаллов твердой фазы. Для полного превращения жидкой фазы в твердую необходимо изменение объема приблизительно на 5 %. В отличие от замерзающей воды, твердая фаза образуется в самой горячей части контейнера

Таким образом, Померанчук предложил способ охлаждения тающего  $^3\text{He}$ . Если смесь жидкого и твердого  $^3\text{He}$  сжимается без подвода тепла, она охлаждается по мере того, как жидкость превращается в твердое тело.

Впервые в 1964 г. (публикация 1965 г. [29]) в институте Физических проблем в Москве Ю. Ануфриев охладил  $^3\text{He}$  методом Померанчука и достиг  $T = 20$  мК. Практическая проблема, в которую упиралась экспериментальная методика охлаждения, была в непредсказуемости появления твердого гелия, он появлялся в различных местах установки и создавал пробки, ломал сильфоны, приводил к трению и разогреву системы. У Ануфриева проблема частично решалась методом напряженной диафрагмы, когда  $^3\text{He}$  сжимался в ячейке с прочными, но гибкими стенками.

Американские исследователи успели первыми [6]. В группе из трех ныне нобелевских лауреатов Ли и Ричардсон были старшими

научными сотрудниками, а Дэвид Ошеров – студентом-дипломником. Именно последний и создал установку для исследования фазовых переходов в твердом  ${}^3\text{He}$  под давлением на основе ячейки Померанчука.

Установка Ошера показана на рис. 1.19. Устройство установки полностью исключало проблемы твердого  ${}^3\text{He}$  и позволяло получать информацию об изменении объема, температуры и ЯМР-отклике.

В установке использованы два бериллиево-медных сильфона, связанные поршнем, для передачи сжимающего усилия образцу  ${}^3\text{He}$ . Поперечное сечение с  ${}^4\text{He}$  было больше, чем у сильфона с  ${}^3\text{He}$ , что приводило к усилению сжатия, как в гидравлическом прессе. Когда жидкий  ${}^4\text{He}$  в верхнем сильфоне сжимался извне, он заставлял двигаться поршень, и нижний сильфон расширялся вниз, в ячейку с  ${}^3\text{He}$ . Растяжение нижнего сильфона предотвращало захват твердого  ${}^3\text{He}$  и его сдавливание между ребрами.

При медленном возрастании или убывании давления также медленно возрастала и убывала температура смеси, так что можно было однозначно связать эти параметры. Благодаря такой конструкции компрессионной ячейки впервые удалось опуститься до температур около милликельвина. Ошеров и обнаружил первым особенности на зависимости давления от времени, что эквивалентно изменению температуры, в процессе медленного возрастания (убывания) объема твердого  ${}^3\text{He}$  (*кривая сжатия*, рис. 1.20, *а*). Более того, устойчиво наблюдались две отчетливые аномалии, которые называли *A*- и *B*-фазами (температуры, при которых возникают эти фазы, равны 2.7 мК и 2.1 мК соответственно).

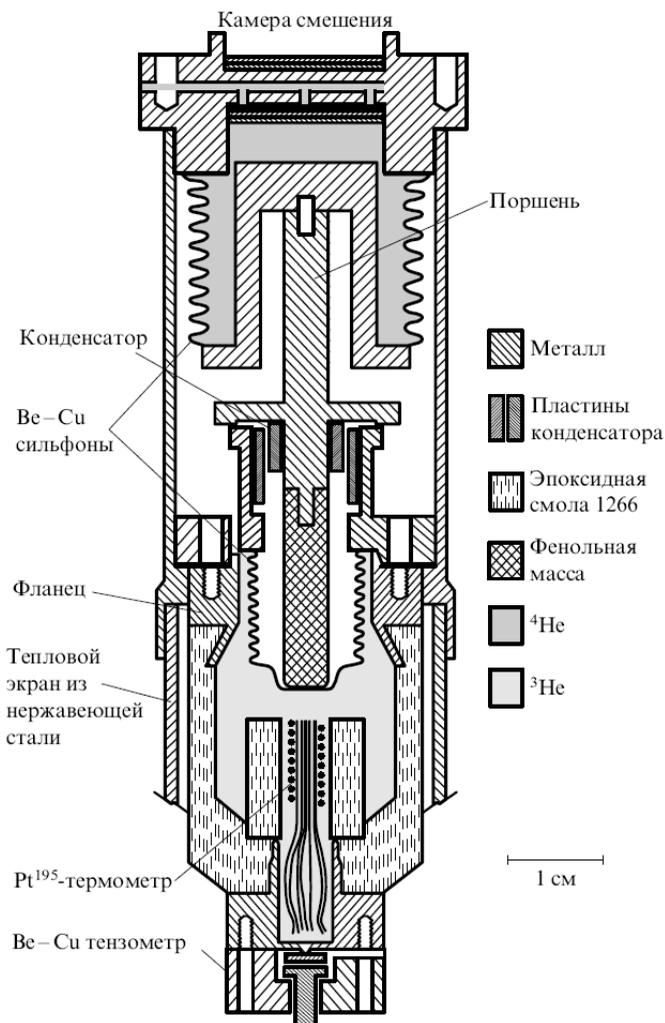


Рис. 1.19. Ячейка Померанчука из [30], использованная в решающих экспериментах Ошерова, Ричардсона и Ли. Давление, прикладываемое к жидкому  ${}^4\text{He}$  в верхнем сильфоне, заставляет поршень выдвигать нижний сильфон в ячейку с  ${}^3\text{He}$ , что увеличивает давление в ячейке.

Сильфон с  ${}^4\text{He}$  имеет больший размер, чем нижний сильфон, обеспечивая выгодное отношение сжатия, по аналогии с гидравлическим прессом

При этих температурах резко меняется скорость охлаждения, и это видно как излом (или скачок) на кривой адиабатического сжатия. При этом эффект повторялся как при охлаждении (сжатии), так и при нагреве (расширении) в тех же точках (рис. 1.20), т.е. был *обратим*. Несомненно, наблюдались два фазовых обратимых перехода. Первая статья в *Physical Review Letters* [31] была посвящена фазовым переходам в *твердом* гелии, т.е. исследователи сначала не поняли, что имеют дело с *жидкой* фазой. Однако после измерения намагничивания с помощью катушки ЯМР выяснилось, что, во-первых, аномалии в зависимости  $P(T)$  сопровождаются в этих же точках аномалиями намагниченности, а во-вторых, эти аномалии соответствуют не твердой фазе, а жидкости. Причем для отделения вкладов жидкой и твердой фаз использовался пространственный профиль магнитного поля в виде линейного градиента вдоль образца. Любопытно, что это один из первых случаев применения *магнитной томографии*, пусть и в лабораторных условиях, сейчас активно используемой в медицине.

В более сильных полях ( $\sim 400$  Гс) *B*-фаза подавляется в пользу *A*-фазы, и поликритическая точка исчезает. В более высокотемпературной точке *A* появляется отчетливый большой вклад восприимчивости жидкости (рис. 1.21): в точке перехода появляется добавочная линия, отсоединившаяся от основного пика, соответствующего в основном твердой фазе, и по мере охлаждения образца постоянно сдвигается в область больших частот. В низкотемпературной точке *B* восприимчивость жидкости резко падет примерно в два раза (рис. 1.22). Кроме того, в точке *B* линия, появившаяся в *A*, исчезает.

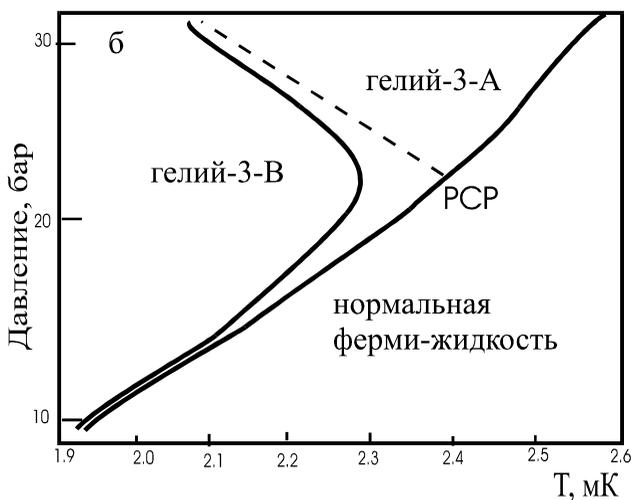
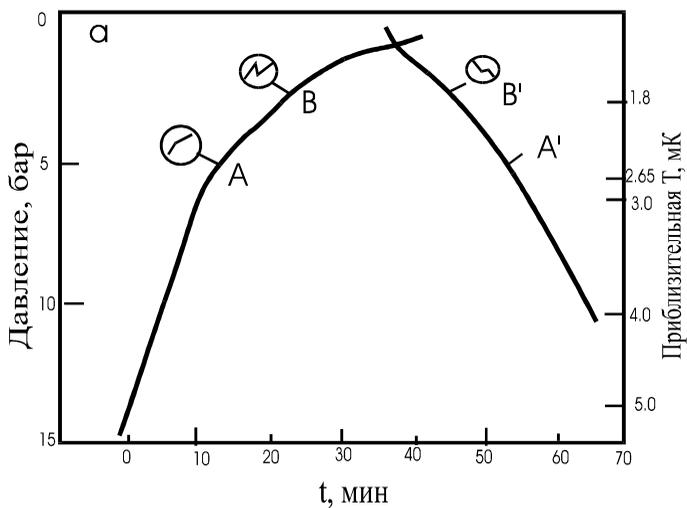


Рис. 1.20. Наблюдение сверхтекучести в жидком  $^3\text{He}$ : а) зависимость давления от времени (температуры) при адиабатическом сжатии (расширении) в ячейке Померанчука (особенности  $A, A'$  – изменение наклона,  $B$  – внезапное падение давления при охлаждении,  $B'$  – небольшое плато при нагревании); б) экспериментальная диаграмма сверхтекучих фаз в  $^3\text{He}$ . В самых слабых магнитных полях ( $\sim 50$  Гс)  $A$ -фаза не существует ниже поликритической точки РСР, с давлением 22 бар

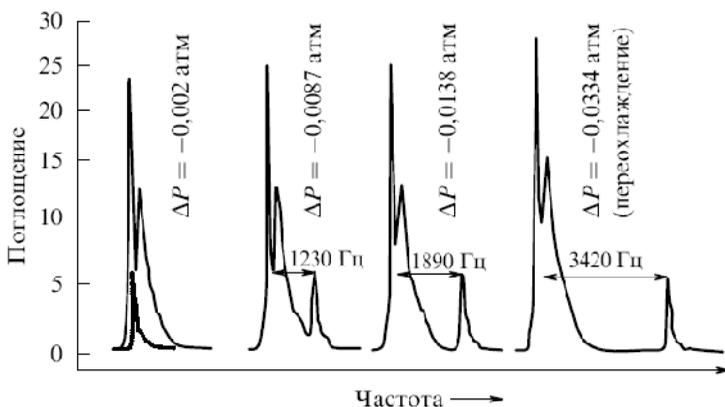


Рис. 1.21. Последовательность профилей ЯМР из [30], измеренных в ячейке, показанной на рис. 1.19, после того, как был убран градиент поля. Сигнал от жидкости в А-фазе сдвигается все дальше от сигнала из кристалла, соответствующего ларморовой частоте, по мере охлаждения образца. Сдвинутая линия внезапно исчезает в точке Б

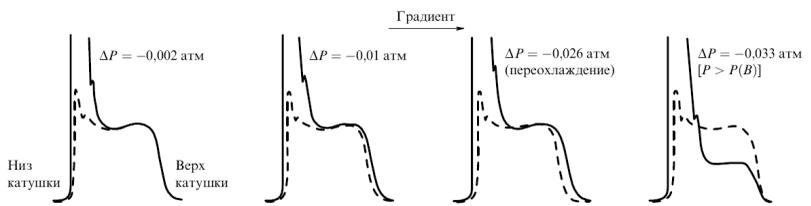


Рис. 1.22. Последовательность профилей ЯМР из [30], измеренных при градиенте поля в ячейке, показанной на рис. 1.19, при охлаждении образца  $^3\text{He}$  вдоль кривой плавления

Такие аномалии однозначно говорили о фазовых переходах в ферми-жидкости, которые могли произойти только при спаривании исходных ферми-частиц в некие конгломераты (пары), изменении статистики и появлении сверхтекучести.

### 1.10. Теоретические представления. $p$ -спаривание. Фазы Андерсона – Морела и Бальяна – Вертхамера. Теплоемкость

Итак, в 1972 г. были обнаружены две ( $A$ ,  $B$ ) сверхтекучие фазы в жидком  ${}^3\text{He}$ . Как же сейчас объясняют эти фазовые переходы? Полагают, что здесь имеет место спаривание носителей, но из-за сильного взаимодействия между атомами  ${}^3\text{He}$  куперовские пары будут иметь совсем другую природу, чем пары сверхпроводящих электронов. В обычных сверхпроводниках куперовские пары имеют нулевой орбитальный магнитный момент ( $l = 0$ ). Сильное короткодействующее отталкивание частиц в жидком  ${}^3\text{He}$  запрещает этот тип спаривания, однако возможно спаривание с более высоким угловым моментом.

В разное время был предложен целый ряд моделей спаривания с отличным от нуля орбитальным угловым моментом. Предлагались как модели с  $p$ - ( $l = 1$ ), так и с  $d$ - ( $l = 2$ ) типом спаривания. Среди ранних исследований были работы Эмери и Сесслера (1960, [32]), Андерсона и Морела (1961, [33]) и др. Модели  $p$ -спаривания, выдвинутые Бальяном и Вертхамером (1963, [34]), а также модель Андерсона и Морела были позднее отождествлены с реальными сверхтекучими фазами жидкого  ${}^3\text{He}$ .

Важная черта спаривания с нечетным  $l$  состоит в том, что полный спин пары равен единице (а не нулю, как при четном  $l$ ), поэтому любой параметр порядка для спаривания с нечетным  $l$  будет обладать внутренними степенями свободы, связанными с ненулевым спином и нулевым орбитальным моментом. Это состояние радикально отличается от состояния обычной сверхпроводящей жидкости. Если обозначить состояние пары атомов  ${}^3\text{He}$  как  $|\sigma\sigma'\rangle$ ; где  $\sigma, \sigma'$  –  $z$ -проекции спинов атомов, то возможные состояния при  $p$ -спаривании с суммарным спином  $S = 1$  будут следующими:

$$\begin{aligned}
S_z = 1 &\Rightarrow |\uparrow\uparrow\rangle; \\
S_z = 0 &\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\uparrow\rangle + |\downarrow\downarrow\rangle); \\
S_z = -1 &\Rightarrow |\downarrow\downarrow\rangle.
\end{aligned}
\tag{1.81}$$

Сверхтекучая *B*-фаза, отождествляемая с моделью Бальяна и Вертхамера, соответствует параметру порядка со всеми тремя спиновыми компонентами ( $S_z = 0, 1, -1$ ). Сверхтекучая *A*-фаза отождествляется с состоянием Андерсона – Морела и состоит только из пар с состояниями  $|\uparrow\uparrow\rangle$  и  $|\downarrow\downarrow\rangle$ , т.е. отсутствует состояние с  $S_z = 0$ . Более тщательные измерения также позволили выделить дополнительную сверхтекучую *A'*-фазу, существующую только в магнитном поле и имеющую только одну спиновую компоненту:  $|\uparrow\uparrow\rangle$ . Экспериментальная фазовая диаграмма показана на рис. 1.20, б.

Как же согласуются наблюдаемые аномалии магнитной восприимчивости с такой интерпретацией сверхтекучих фаз? В фазе *B* (Бальяна и Вертхамера) состояние с  $S_z = 0$  является «бесспиновым» и не дает вклада в восприимчивость, которая поэтому должна составлять  $2/3$  от восприимчивости нормальной ферми-жидкости, что очень близко к наблюдаемому уменьшению в точке *B* на экспериментальной кривой. Так же легко объяснить наблюдаемое подавление этой фазы с увеличением поля и вытеснение ее фазой *A* в область более низких температур (см. фазовую диаграмму) – в сильном магнитном поле подавляет пары с нулевым спином, а пары  $|\uparrow\uparrow\rangle$  и  $|\downarrow\downarrow\rangle$  легко откликаются на поле, меняя ориентацию.

Сдвиг частоты ЯМР-линии в фазе *A* блестяще объяснил теоретик Энтони Легетт [35], будущий нобелевский лауреат. Он показал, что это возможно, если куперовские пары в условиях *p*-спаривания имеют коррелированное состояние, и происходит когерентное сложение дипольных моментов пар. В результате появляется

эффективное внутреннее магнитное поле, сдвигающее по частоте ЯМР-отклик.

Необычные типы спаривания, реализуемые в жидком  $^3\text{He}$ , и внутренние степени свободы пары отражаются на физических свойствах этой сверхтекучей ферми-жидкости. Орбитальная анизотропия А-фазы приводит к экспериментально наблюдаемым анизотропным свойствам сверхтока. Энергетическая щель (запрещенная область энергий, образующаяся из-за спаривания) в  $^3\text{He-A}$  также анизотропна, в то время как в  $^3\text{He-B}$  она изотропна.

Измерения теплоемкости при переходах в новые фазы дали кривые, характерные для обычных сверхпроводников, со скачком в точке перехода (рис. 1.23). Выше А-перехода имела место типичная линейная зависимость от температуры, характерная для нормальной ферми-жидкости.

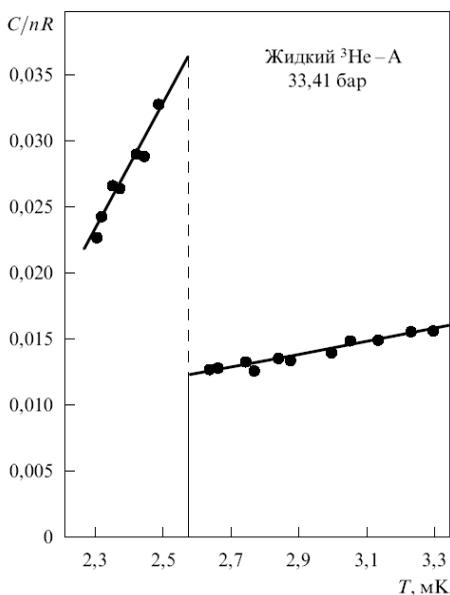


Рис. 1.23. Ранние измерения теплоемкости жидкого  $^3\text{He}$  вблизи сверхтекучего перехода. Такое поведение характерно для перехода БКШ со спариванием. Рисунок взят из [30]

При исследовании сверхтекучести кроме аномалий, связанных с анизотропией параметра порядка, должны наблюдаться свойства, похожие на поведение сверхтекучего  $^4\text{He}$ . И действительно, незатухающие колебания, доказывающие сверхтекучесть в А-фазе, наблюдались Ануфриевым в 1973 г. [36], появление четвертого звука, имеющего место и в  $^4\text{He}$ , наблюдалось Яновым и Реппи в 1974 г. [37], второй звук был обнаружен в А-фазе Корручини и Ошеровым в 1980 г. [38]. Проводились эксперименты и во вращающихся кристатах  $^3\text{He}$ , однозначно доказавшие наличие сверхтекучести.

Сверхтекучий  $^3\text{He}$  – сложная система, где внутренние степени свободы являются причиной целого ряда явлений, не наблюдаемых в обычных сверхпроводниках с изотропным спариванием или в сверхтекучем  $^4\text{He}$  [30, 39, 40]. Сложная фазовая диаграмма демонстрирует существование трех различных фаз жидкого  $^3\text{He}$ , каждой со своим набором свойств. Уникальность жидкого  $^3\text{He}$  – в наличии ненулевого спинового и орбитального квантового числа пар, приводящего как к анизотропным свойствам, так и к аномальному отклику на внешнее магнитное поле.

Рассмотрим современные представления об анизотропных параметрах порядка в двух основных сверхтекучих фазах  $^3\text{He}$ .

Как состояние Андерсона – Морела, так и состояние Бальяна – Вертхамера для  $p$ -спаривания – состояния с полным орбитальным моментом  $L = 1$  и полным спином  $S = 1$ . Состояние Андерсона – Морела – это состояние с орбитальным квантовым числом  $m = 1$  относительно направления квантования  $\vec{l}$  и спиновым числом  $m = 0$  относительно некоего направления  $\vec{d}$ . Другими словами, представим себе куперовскую пару, состоящую из атомов  $^3\text{He}$ , в которой частицы на самом деле вращаются друг относительно друга, как это показано на рис. 1.24.

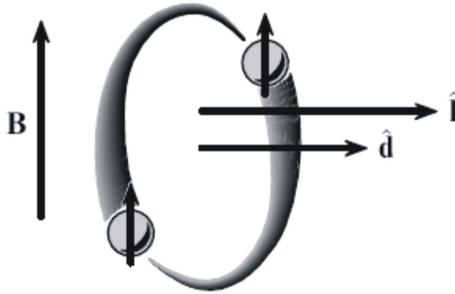


Рис. 1.24. Фиктивная куперовская пара согласно [40]. Дипольная энергия двух вращающихся ядер минимальна, когда проекция полного спина на направление углового момента  $\vec{l}$  равна нулю

Диполь-дипольная энергия при усреднении за один период вращения будет минимизирована, если проекция полного спина на направление орбитального углового момента равна нулю. Такой спиновой конфигурации ставят в соответствие упомянутый выше вектор  $\vec{d}$ , который в равновесии параллелен орбитальному угловому моменту куперовской пары. В состоянии Андерсона – Морела угловые моменты куперовских пар локально ориентированы в одном и том же направлении, которое и обозначается как  $\vec{l}$ . Можно ожидать, что в А-фазе в равновесии  $\vec{d}$  будет параллелен  $\vec{l}$ .

Представим параметр Андерсона – Морела в виде произведения орбитальной части в координатном пространстве и спиновой части. Если ограничиться только угловыми переменными, то

$$\Psi_{AM} \sim e^{i\varphi} \sin \theta (|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle). \quad (1.82)$$

Здесь сферическая часть  $Y_{11} \sim e^{i\varphi} \sin \theta$  – фактически полярная ось  $\vec{l}$ . Спиновая триплетная функция, точнее ее проекция спина, определяется относительно оси  $\vec{d}$ , поэтому остается только компонента  $(|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle)$ . Таким образом, нет зависимости спиновой части от углов, и значит, вектор  $\vec{d}$  – один и тот же во всем координатном (а значит, и импульсном) пространстве, в частности на поверхности Ферми.

Рис. 1.25, а иллюстрирует состояние Андерсона – Морела.

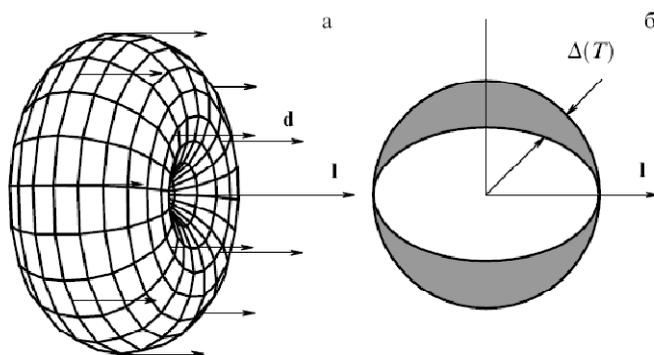


Рис. 1.25. Трехмерное представление параметра порядка Андерсона – Морела согласно [30]. Вектор  $\vec{l}$  в центре определяет ось параметра порядка. Вдоль этой оси амплитуда равна нулю, что соответствует зависимости  $\sin \theta$ , где  $\theta$  – полярный угол по отношению к оси  $\vec{l}$ . Вектор  $\vec{d}$  имеет *одно и то же* направление для всех точек на поверхности Ферми (а). Заштрихованной областью показана анизотропная энергетическая щель. Ясно видны два нуля в направлении  $\vec{l}$  (б)

Видна угловая анизотропия с нулями в  $\theta = 0$  и  $\theta = \pi$ . Соответственно, энергетическая щель, аналогичная энергетической щели в спектре возбуждений сверхпроводника, также анизотропна (рис.1.25, б). Такая анизотропия чем-то напоминает фазы в *жидких кристаллах*. Картины ориентации вектора  $\vec{l}$  называют также *текстурами*.

Направление  $\vec{l}$  в  ${}^3\text{He}$  ориентировано перпендикулярно к стенкам сосуда, а также чувствительно к течению жидкости и внешнему магнитному полю.

Что касается второй сверхтекучей фазы – состояния Бальяна – Вертхамера, то оно включает в себя все три спиновые комбинации

$$\Psi_{BW} \sim Y_{1,-1} |\uparrow\uparrow\rangle + Y_{10} (|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle) + Y_{11} |\downarrow\downarrow\rangle \quad (1.83)$$

и не является состоянием с одинаковыми спинами вдоль всей поверхности Ферми. Учитывая, что из-за равенства нулю полного момента это состояние сферически симметрично, можно, пользуясь этой симметрией, задать состояние Бальяна – Вертхамера в импульсном пространстве  $\vec{k}$  как

$$\vec{d} = \text{const} \times \vec{k}. \quad (1.84)$$

Это соотношение и определяет зависимость  $\vec{d}$  в импульсном представлении.

Кроме того, присутствует вырождение энергии состояния относительно поворота спина и орбитальных координат друг относительно друга. В итоге в *B*-фазе можно поворачивать  $\vec{d}$  вокруг некоторой оси  $\vec{n}$ , чтобы получить соотношение  $\vec{b} = R\vec{k}$ ,  $R$  – произвольное вращение вокруг оси  $\vec{n}$ . Это вырождение снимается слабым диполь-дипольным взаимодействием, и приводит к повороту спиновых координат по отношению к орбитальным на фиксированный угол  $104^\circ$ , как было показано теоретическим анализом Легетта [35]. Такая слабая анизотропия позволяет и в фазе *B* наблюдать текстуры как в жидком кристалле. Но в среднем параметр порядка сферически симметричен, и энергетическая щель изотропна (рис. 1.26).

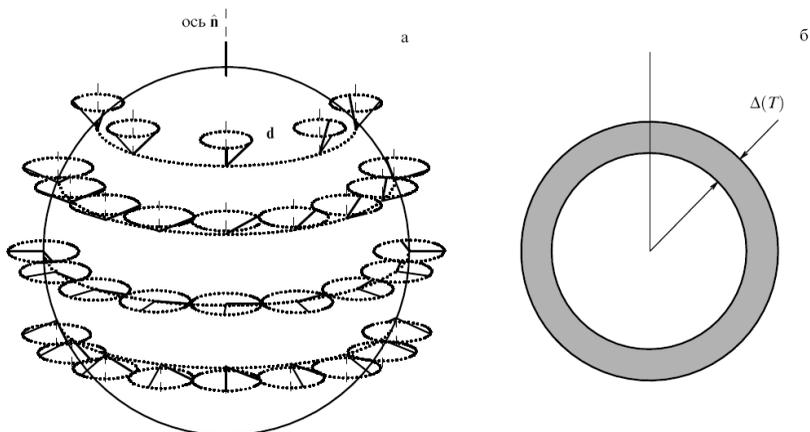


Рис. 1.26. Параметр порядка для сверхтекучего  $^3\text{He-B}$  из [30]. Для всех точек ферми-поверхности показаны векторы  $\vec{d}$  (толстые линии). Ось вращения  $\vec{n}$  направлена вертикально (а). Изотропная энергетическая щель для параметра порядка Бальяна – Вертхамера показана заштрихованной областью. Обычные синглетные сверхпроводники также имеют изотропную энергетическую щель (б)

### 1.11. Анизотропные вихри. Анизотропия сверхтекучей плотности. Эксперименты

Наличие анизотропии в сверхтекучих фазах и внутренние степени свободы параметра порядка приводят к новым явлениям, наблюдаемым в  $^3\text{He}$  при температурах около милikelьвина. Например, орбитальная анизотропия А-фазы приводит к анизотропным свойствам потока. В экспериментах Мермина и Хо [41] показано, что меняется характер квантования вихревого движения.

Впервые анизотропию сверхтекучей плотности наблюдали Бертольд и др. [42], используя технологию Андроникашвили с крутильным маятником (рис. 1.27).

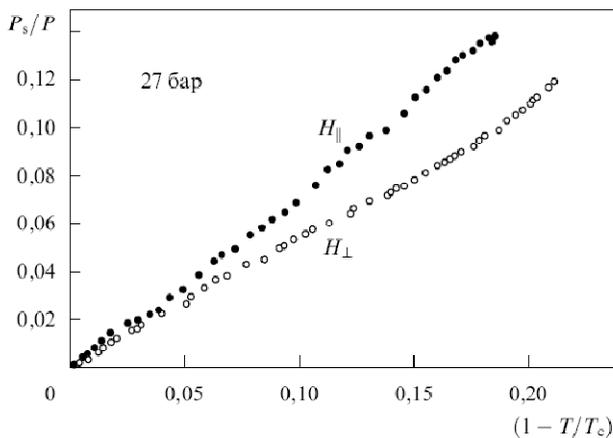


Рис. 1.27. Анизотропия сверхтекучей плотности, определенная из измерений с крутильным маятником. Показаны две разные ориентации параметра порядка, который ориентируется внешним магнитным полем благодаря дипольному взаимодействию

Энергетическая щель в  $^3\text{He}$  в  $A$ -фазе обращается в нуль в двух точках, в которых ось  $l$  «прокалывает» поверхность Ферми. Поэтому распад пар может быть и при абсолютном нуле температур, т.е. может не быть порога по взаимодействию, аналогично теории БКШ. Такая анизотропия щели подобна анизотропии сверхпроводящего параметра порядка в ВСП (только там  $d$ -, а не  $p$ -симметрия). Впервые орбитальную анизотропию элементарных возбуждений наблюдали в  $^3\text{He-A}$  в экспериментах Лоунсона и др. [43], а также Роача с сотрудниками [44].

В фазе  $B$  параметр порядка изотропен, поэтому всегда есть конечный порог по взаимодействию  $2\Delta$ , ниже которого невозможен распад пар. Такая ситуация близка к картине возбуждений в обычных сверхпроводниках с конечной щелью, описываемых теорией БКШ. Наблюдения затухания ультразвука в

$^3\text{He-B}$  [45], свидетельствуют о пороге по частоте, связанном с разрывом пар (рис. 1.28).

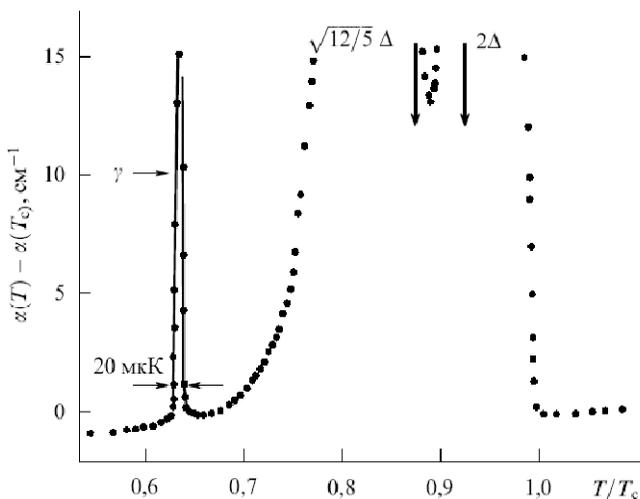


Рис. 1.28. Затухание ультразвука в сверхтекучем  $^3\text{He-B}$  из [30]

Красивые эксперименты проводились в группе Боровика-Романова в Институте физических проблем им П.Л. Капицы [46]. Удалось стабилизировать большие области сверхтекучего  $^3\text{He}$  со спинами, однородно прецессирующими с одной частотой, на фоне значительного градиента магнитного поля. Спиновые супертоки, присущие этому сверхтекучему состоянию, играют важную роль при создании этих однородно прецессирующих макроскопических областей. Важный результат этих работ – наблюдение эффекта Джозефсона со спиновыми токами.

Интенсивно развиваются исследования сверхтекучих фаз  $^3\text{He}$  в аэрогеле. В работе [47] было обнаружено, что  $^3\text{He}$  испытывает сверхтекучий переход в образце 98 %-го аэрогеля. Аэрогель представляет собой «клубок» из беспорядочно перепутанных и соединенных друг с другом волокон (обычно  $\text{SiO}_2$ ). В образце

98 %-го аэрогеля 2 % объема занято волокнами, а остальная часть объема – свободна. Из соотношения между расстоянием между волокнами ( $\sim 3$  нм) и длины когерентности в  $^3\text{He}$  аэрогель представляет собой примеси внедрения. Таким образом, впервые можно было исследовать примеси в квантовой жидкости, вымывающей их обычно из объема.

В экспериментах Дмитриева с сотрудниками [48] методами импульсного ЯМР-анализа были исследованы магнитные свойства сверхтекучего  $^3\text{He}$  в аэрогеле. Показано, что именно при угле отклонения намагниченности  $104^\circ$  (*угле Легетта*) обнаружен резкий рост сдвига частоты прецессии, что характерно для объемной фазы  $^3\text{He}$ -В. Таким образом, низкотемпературная фаза  $^3\text{He}$  в аэрогеле имеет структуру параметра порядка, подобную В-фазе.

Интенсивные исследования  $^3\text{He}$  касаются также твердого состояния: изучается фазовое расслоение твердых растворов  $^3\text{He}$  и  $^4\text{He}$ , нанокластеры в их объеме [49] и др.

### **1.12. Смеси $^3\text{He}$ в $^4\text{He}$ . Фермиевская жидкость в бозе-фоне. Уровни Андреева. Эксперименты**

Одной из наиболее важных проблем физики низких температур является задача поиска сверхтекучести в трех- и двумерных (тонкие пленки, субмонослои) растворах  $^3\text{He}$  в  $^4\text{He}$  [50].

Раствор  $^3\text{He}$  в  $^4\text{He}$  представляет собой простейшую разреженную систему ферми-газа  $^3\text{He}$  в инертном сверхтекучем конденсате  $^4\text{He}$ , что делает такой раствор идеальным объектом для развития и апробации различных методов теории ферми-жидкости. Первая классическая работа в области теории сверхтекучести трехмерных растворов принадлежит Бардину, Бейму и Пайнсу (1967) [51],

установившим изящную аналогию между спариванием двух атомов  ${}^3\text{He}$  в растворе через поляризацию фона  ${}^4\text{He}$  (обмен виртуальными фононами) и электрон-фононным взаимодействием в теории сверхпроводимости. Согласно их предположению, взаимодействие между двумя частицами  ${}^3\text{He}$  состоит из прямого и обменного взаимодействий. Прямое взаимодействие – отталкивание твердых ядер атомов  ${}^3\text{He}$  на малых расстояниях и ван-дер-ваальсовское притяжение на больших расстояниях. Такое взаимодействие неплохо описывается потенциалом Леннарда – Джонса, упоминаемым ранее в разделе о квантовых кристаллах. Обменное взаимодействие представляет собой взаимодействие двух атомов  ${}^3\text{He}$  через локальное изменение плотности  ${}^4\text{He}$ . Именно так вводится деформационный потенциал для описания электрон-фононного притяжения в теории БКШ для сверхпроводников через флуктуации ионной плотности. В импульсном пространстве фурье-компоненту взаимодействия представим как

$$V(q) = V_{\text{прямое}}(q) + V_{\text{обменное}}(q), \quad (1.85)$$

где  $V_{\text{обменное}}(q)$  обусловлено (рис. 1.29) обменом виртуальным фононом в трехмерном случае и обменом квантом третьего звука в двумерной ситуации.

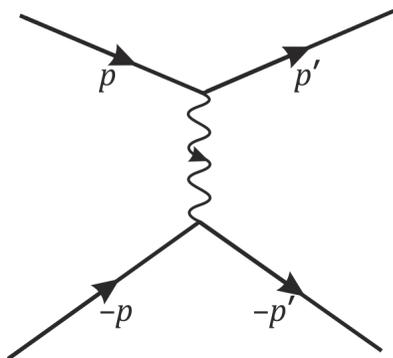


Рис. 1.29. Взаимодействие двух атомов  ${}^3\text{He}$  через поляризацию сверхтекучего фона  ${}^4\text{He}$

При низких температурах и концентрациях подсистема атомов  ${}^3\text{He}$  является ферми-жидкостью малой плотности, т.е. фактически ферми-газом. Поэтому вопросы сверхтекучести в ней связаны с амплитудой и знаком суммарного межчастичного взаимодействия.

В трехмерном случае при малых концентрациях полное взаимодействие – притягательное [50], и можно ожидать  $s$ -спаривания типа БКШ у атомов  ${}^3\text{He}$ . Однако анализ экспериментов по коэффициенту спиновой диффузии [52] показывает, что при концентрации  $x = x_0 \sim 4\%$  длина рассеяния (а значит, и взаимодействие) меняет знак и становится положительной (рис. 1.30).

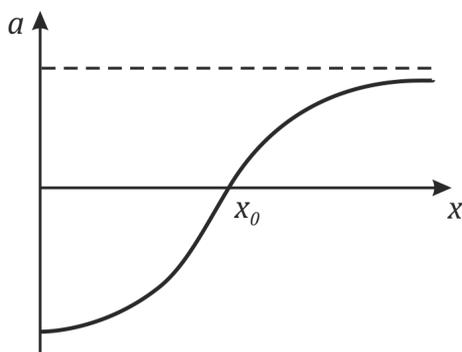


Рис. 1.30. Качественная зависимость длины рассеяния в растворе от концентрации  ${}^3\text{He}$ . При  $x = 100\%$   $a(x)$  стремится к длине рассеяния чистого  ${}^3\text{He}$  и приблизительно равняется при нулевом давлении  $2/k_{F_0}$ , где  $k_{F_0}$  – ферми-импульс чистого  ${}^3\text{He}$

Таким образом, при концентрациях, больших  $x_0$ , и концентрациях, меньших  $x_0$ , должно быть разное описание.

Формула для температуры сверхтекучего перехода в ферми-газе с притяжением была впервые получена Горьковым и Мелик-Бархударовым [53]. Ее модификация для концентрации  $x < x_0$  и, соответственно, отрицательной длины рассеяния  $a_0 < 0$  имеет вид

$$T_c = 0.1E_{F_0}x^{2/3} \exp \left[ -\frac{\pi}{2|a_0|k_{F_0}x^{1/3}} \right], \quad (1.86)$$

где  $E_{F_0}$  и  $k_{F_0}$  – энергия и импульс Ферми для чистого  ${}^3\text{He}$ .

Температуру сверхтекучести  ${}^3\text{He}$  (т.е. сверхтекучести разреженной ферми-системы  ${}^3\text{He}$ ) из этой формулы оценивают как

$$T_c \sim 10^{-4} \text{ К}. \quad (1.87)$$

Эта оценка справедлива для трехмерной ферми-системы.

Раствор  ${}^3\text{He}$  в  ${}^4\text{He}$  является очень интересным объектом также в связи с тем, что его можно сделать двумерным. В сверхпроводящих электронных системах пленка считается двумерной, если ее толщина  $d$  много меньше длины когерентности  $\xi \sim 100 - 1000 \text{ \AA}$ . В случае пленки  ${}^3\text{He}$  на графойле (отслаивающийся графит) и слоев раствора, субмонослоев, радиус локализации атомов  ${}^3\text{He}$  в третьем измерении (т.е. толщина пленки) действительно порядка межатомных расстояний.

Двумерный раствор  ${}^3\text{He}$  в  ${}^4\text{He}$  является как бы «мостиком» между сверхтекучестью и сверхпроводимостью. О двумерии такой системы свидетельствуют следующие экспериментальные факты. Измерения коэффициента поверхностного натяжения (фактически поверхностной свободной энергии) как функции температуры в слабом растворе  ${}^3\text{He}$  в  ${}^4\text{He}$  дали нетривиальную зависимость. Для интерпретации экспериментов Андреевым [54] была предложена идея о существовании поверхностных примесных уровней на свободной поверхности  ${}^4\text{He}$ . Согласно вариационным расчетам Лекнера и Саама [55], появление андреевских уровней обусловлено комбинацией эффектов, связанных с ван-дер-Ваальсовским взаимодействием  ${}^3\text{He}$  с профилем плотности  ${}^4\text{He}$ ,

вблизи поверхности сильно меняющегося, и с различием энергии нулевых колебаний  ${}^3\text{He}$  и  ${}^4\text{He}$ . Именно эти эффекты и приводят к своеобразной локализации атомов  ${}^3\text{He}$  вблизи поверхности. В результате атомы  ${}^3\text{He}$  свободно двигаются вдоль поверхности, и плохо – поперек. Они локализуются у поверхности  ${}^4\text{He}$  в пленку. Интересно, что температура сверхтекучести у двумерной системы может быть выше, чем оценка (1.87) для трехмерной системы.

## 2. Низкоразмерная сверхтекучесть

### 2.1. Фазовые переходы "моттовский изолятор – сверхтекучая жидкость". Низкоразмерная сверхтекучесть. Проблема существования фазовых переходов. Бозонная модель Хаббарда

Исследования сверхтекучести и бозе-конденсата в дальнейшем коснулись проблем протекания сверхтекучего гелия в пористых каналах, натекания на поверхности, и привели к пониманию возможности существования фазовых переходов в квантовых системах пониженной размерности даже при нулевой температуре.

На эксперименте наблюдали скачки химического потенциала при натекании очередного слоя сверхтекучего гелия на графойл (скол поверхности графита) [56 – 58], при протекании по углеродным нанотрубкам [59].

Почему могут быть фазовые переходы в одномерных квантовых системах? Существует доказательство Ландау [60] об отсутствии таких переходов в классической одномерной системе, и объясняется оно ростом тепловых флуктуаций и потерей устойчивости упорядоченной фазы. Однако для квантовой ситуации фазовое пространство имеет еще одну размерность – ось мнимого времени [61], так что эффективно квантовая  $d$ -мерная задача эквивалентна  $(d + 1)$ -мерной классической.

Имеется небольшое число точно решенных одномерных квантовых моделей. Среди них – фермионная модель Хаббарда, ферро- и антиферромагнитные спиновые модели, модель Кондо [62]. Модель с бозонными степенями свободы точно не решается, но она интересна для исследования проблем бозе-конденсации и сверхтекучести.

Модель Бозе – Хаббарда [63] была разработана для описания фазовых переходов *сверхтекучесть – изолятор* и *сверхтекучесть – бозе-стекло*, в таких системах, как сверхтекучий гелий, квантовые спиновые стекла, вихревая решетка в ВТСП, система джозефсоновских контактов и т.п.

Гамильтониан бозонной модели Хаббарда имеет следующий вид:

$$H = -t \sum_{\langle ik \rangle} (a_i^\dagger a_k + h.c.) + \sum_k \varepsilon_k n_k + \frac{U}{2} \sum_i n_i (n_i - 1) + V \sum_{\langle ik \rangle} n_i n_k, \quad (2.1)$$

где  $a_i^\dagger$  ( $a_i$ ) – операторы рождения (уничтожения) бозона на узле  $i$ ;  $t$  – матричный элемент перескока на соседние узлы;  $U$  – энергия отталкивания бозонов на узле;  $V$  – энергия взаимодействия бозонов на соседних узлах,  $n_i = a_i^\dagger a_i$  ( $0 \leq n_i \leq N_b$ ,  $N_b$  – число бозонов в системе). Узельные энергии  $\varepsilon_i$  в случае разупорядочения андерсоновского типа распределены равномерно на интервале  $-\frac{W}{2} < \varepsilon_i < \frac{W}{2}$ , где величина  $W$  характеризует степень разупорядочения. Отметим, что, как и любая модель типа Хаббарда, гамильтониан (2.1) коммутирует с оператором полного числа частиц, так что исследовать данную модель можно при конкретном бозонном заполнении  $N_b$ .

В отсутствие взаимодействия на соседних узлах ( $V = 0$ ) модель (2.1) имеет богатую фазовую диаграмму [63] и имеет фазовый переход из сверхтекучего состояния в бозе-стекло или моттовский изолятор при изменении параметра  $t/U$ . Если же рассмотреть предел  $U \gg t$ , что эквивалентно запрету на числа заполнения  $n_i \leq 1$ , и включить взаимодействие на соседних узлах  $V$ , то получится так называемая *hard-core* модель – бозоны с “жесткими сердцевинами” [64]. Эта модель обладает смешанной статистикой – фермионы на одном узле и бозоны (симметричная волновая функция) на разных местах решетки. Кроме того, эта модель

эквивалентна модели Гейзенберга со спином  $1/2$ , если поставить в соответствие бозонные и спиновые операторы следующим образом:

$$\begin{aligned} S_i^+ &\rightarrow a_i^+; \\ S_i^- &\rightarrow a_i; \\ S_i^z &\rightarrow \frac{1}{2} - a_i^+ a_i. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Имеем тогда  $XXZ$ -модель:

$$H_G = -2t \sum_{\langle ik \rangle} (S_i^x S_k^x + S_i^y S_k^y) + V \sum_{\langle ik \rangle} S_i^z S_k^z - \sum_k (\varepsilon_k + Vz) S_k^z. \quad (2.3)$$

Здесь  $Z$  – число ближайших соседей.

Система, описываемая этой моделью, также испытывает различные фазовые переходы (например, при  $V = 2t$  и проекции спина  $\langle S^z = 0 \rangle$  конкурируют изинговское упорядочение в  $z$ -направлении и  $XY$ -упорядочение, что отождествляется с точкой перехода сверхтекучесть – изолятор для hard-core-бозонов). В одномерной ситуации с точностью до калибровочной фазы модель hard-core эквивалентна бесспиновым взаимодействующим фермионам.

Если ослабить запрет на числа заполнения, например допустить двойное заполнение узлов ( $n_i \leq 2$ ), то получаем первую из моделей soft-core-бозонов – так называемую *редуцированную* бозонную модель Хаббарда. Дальнейшее смягчение запрета на числа заполнения приведет в конце концов к полной бозонной модели (2.1) [64].

Таким образом, модель Бозе – Хаббарда имеет большую область применимости для самых разнообразных квантовых систем с сильными корреляциями.

## 2.2. Фазовые диаграммы "сверхтекучесть – бозе-стекло – моттовский изолятор". Связь с другими моделями

Рассмотрим подробнее полную модель (2.1), оставив только узельное взаимодействие  $U$  (полагаем межузельное взаимодействие  $V = 0$ ). Сначала исследуем ситуацию в отсутствие андерсоновского разупорядочения ( $W = 0$ ). Бозонная модель (2.1) при несоизмеримом заполнении (когда число бозонов  $N_b$  не равно числу узлов решетки  $N_a$ ) всегда находится в сверхтекучем состоянии при любом значении отношения матричного элемента перескока и узельного взаимодействия  $t/U$ . Особая ситуация имеет место в соизмеримом случае, когда  $N_b$  кратно  $N_a$ . Тогда основное состояние гамильтониана (2.1) является диэлектрическим (моттовский изолятор) при условии, что величина  $t/U$  достаточно мала. При этом сверхтекучая плотность  $\rho_s$  равна нулю, и в спектре возбуждений имеется диэлектрическая щель  $\Delta = \mu_+ - \mu_-$ , где химические потенциалы  $\mu_+$  и  $\mu_-$  определяются соотношениями  $\mu_+ = E(N_a + 1) - E(N_a)$ ,  $\mu_- = E(N_a) - E(N_a - 1)$ ,  $E(N_b)$  – энергия системы из  $N_b$  бозонов. На фазовой диаграмме  $\mu \times t/U$  область диэлектрической фазы ограничена кривыми  $\mu_+(t/U)$  и  $\mu_-(t/U)$ . Увеличение  $t$  ведет к переходу в сверхтекучее состояние с  $\Delta = 0$ , и  $\rho_s \neq 0$ . На фазовой диаграмме  $\mu \times t/U$  этому переходу соответствует трикритическая точка  $(t/U)_c$  (рис. 2.1). Отметим, что такая ситуация будет даже в одномерном случае, и фазовые переходы также будут иметь место.

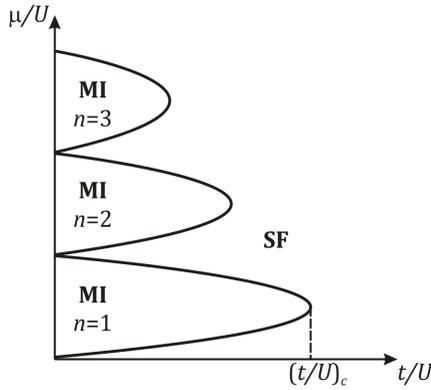


Рис. 2.1. Фазовая диаграмма “сверхтекучесть (SF) – моттовский изолятор (MI)” при  $T = 0$  для бозонной модели Хаббарда в отсутствие беспорядка

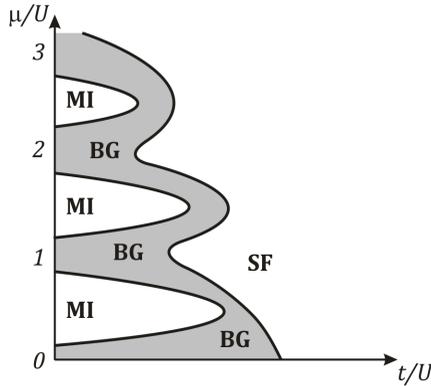


Рис. 2.2. Фазовая диаграмма “сверхтекучесть (SF) – бозе-стекло (BG) – моттовский изолятор (MI)” при  $T = 0$  для бозонной модели Хаббарда в присутствии слабого андерсоновского беспорядка  $W$

В присутствии андерсоновского разупорядочения ( $W \neq 0$ ) в несоизмеримой ситуации происходят фазовые переходы *сверхтекучесть – бозе стекло* (т.е. из состояния с  $\Delta = 0$ , и  $\rho_s \neq 0$

в состоянии с  $\Delta = 0$ , и  $\rho_s = 0$ ) при увеличении параметра  $t/U$ . В соизмеримом случае возможна также ситуация, когда фазы "моттовский изолятор – бозе-стекло – сверхтекучесть" реализуются последовательно с изменением параметра  $t/U$  (рис. 2.2).

Покажем качественно, как можно объяснить наличие различных фазовых состояний в модели Бозе – Хаббарда.

Изучим сначала модель без примесей при  $V = 0$ , т.е. оставим взаимодействие только на узлах. Положим для начала  $t = 0$ , т.е. «выключим» перескок, тогда бозоны находятся на узлах решетки и локализованы. Энергию одного бозона как функцию плотности в этом случае легко рассчитать прямо из гамильтониана:

$$\varepsilon(n) = -\mu n + \frac{U}{2} n(n - 1). \quad (2.4)$$

Также несложно рассчитать энергию при добавлении одной частицы в систему или удалении одной частицы из системы:

$$\begin{aligned} \varepsilon(n + 1) &= -\mu(n + 1) + \frac{U}{2} n(n + 1); \\ \varepsilon(n - 1) &= -\mu(n - 1) + \frac{U}{2} (n - 1)(n - 2). \end{aligned} \quad (2.5)$$

Рассмотрим эти величины как функции химического потенциала (рис. 2.3).

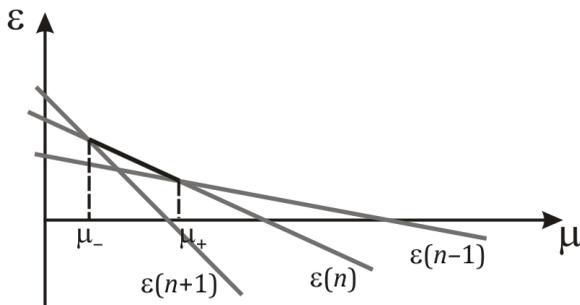


Рис. 2.3. Зависимость энергии одной частицы от химического потенциала

Несложно видеть, что минимум энергии для заданного  $n$  приходится на область между точками, где

$$\begin{aligned} \varepsilon(n) &= \varepsilon(n - 1); \\ \varepsilon(n) &= \varepsilon(n + 1). \end{aligned} \quad (2.6)$$

Первая точка соответствует  $\mu_- = U(n - 1)$ , а вторая –  $\mu_+ = Un$ . Таким образом, из анализа видно, что при  $n - 1 < \frac{\mu}{U} < n$  число заполнения фиксировано и равно  $n$ , и можно нарисовать следующую ступенчатую зависимость  $n(\mu)$  (рис. 2.4).

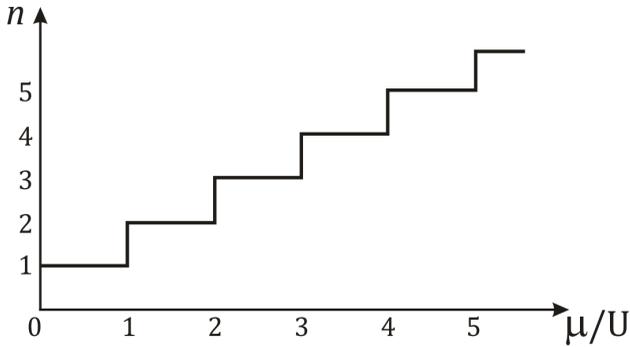


Рис. 2.4. Числа заполнения в зависимости от химического потенциала при нулевой амплитуде перескока

Внутри каждого интервала имеется энергетическая щель в спектре, не позволяющая увеличивать число частиц, пока не преодолен барьер по энергии  $\Delta = \mu_+ - \mu_-$ . Как только химический потенциал достигает значения  $\mu_+$  для данной плотности  $n$ , система скачком переходит в состояние с плотностью  $n + 1$ .

Это состояние *моттовского изолятора*, названного по аналогии с состоянием изолятора в ферми-системах. Частицы локализованы, и для возбуждения системы необходимо преодолеть щель в спектре возбуждений. Состояние с  $n = 1$  называется первой моттовской областью (*Mott lobe*), с  $n = 2 - 2^{nd}$  *Mott lobe* и т.д.

Теперь «включим» движение, т.е. положим амплитуду перескока  $t \neq 0$ , тогда переходы между моттовскими областями «размоются», щели немного уменьшаться, и производная  $dn/d\mu$  уже не будет равна бесконечности в области между  $\mu_+$  и  $\mu_-$  (рис. 2.5).

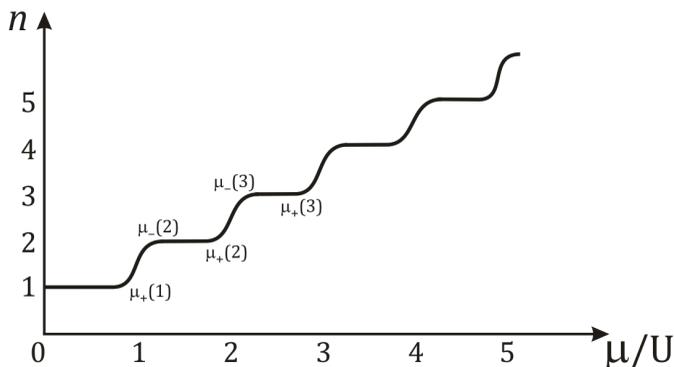


Рис. 2.5. Числа заполнения в зависимости от химического потенциала при ненулевой амплитуде перескока

Такую зависимость можно перенести на плоскость  $\mu \times t/U$  уже в виде фазовой диаграммы, показанной на рис. 2.1. Ясно, что каждая моттовская область снизу и сверху будет ограничена зависимостями  $\mu_-(t/U)$  и  $\mu_+(t/U)$  соответственно. Вне этих областей система находится в сверхтекучем состоянии с нулевой щелью в спектре возбуждений. Заметим, что моттовская область характеризуется бесконечной жесткостью  $\kappa = dn/d\mu$ , а сверхтекучая – конечным значением этой величины.

При определенном критическом значении  $(t/U)_c$  эти зависимости сливаются, и происходит фазовый переход из моттовского изолятора в сверхтекучее состояние при сохранении числа заполнения  $n$ . Это – переход при соизмеримом заполнении, кратном числу узлов. Именно такие фазовые переходы наблюдали

при натекании пленки сверхтекучего гелия на скол графита – графойл [56].

### 2.3. Определение критических точек. Численный спектроскопический анализ. Сверхтоковые состояния. Идентификация сверхтоковых и фононных возбуждений в одномерной разупорядоченной системе

Рассмотрим бозонную модель Хаббарда (2.1) и ее модификации. Аналитический расчет этой модели сильно затруднен, поэтому изучим систему численно, *методом точной диагонализации* гамильтоновой матрицы с расчетом нижних возбужденных состояний.

В одномерной ситуации проблема сверхтекучести в достаточно большой, но конечной системе может быть исследована из анализа нижних возбужденных состояний. Такой анализ называется *спектральным*. Действительно, добавочную энергию, связанную со сверхтоковым состоянием с топологическим квантовым числом  $M$  (числом "winding number", нумерующим состояния с различными значениями циркуляции скорости) в одномерной цепочке длиной  $L$  можно записать в виде [65]

$$E_{sc}^{(M)} = \frac{2\pi^2 M^2 \Lambda_s}{L}, \quad (2.7)$$

где  $\Lambda_s$  – сверхтекучая жесткость – аналог сверхтекучей плотности в одномерной ситуации. При  $|M| \sim 1$  сверхтоковая энергия имеет макроскопический масштабный коэффициент  $L^{-1}$  так же, как и фонон с минимальным импульсом:

$$E_{ph}^{(1)} = \frac{2\pi C_s}{L}, \quad (2.8)$$

$C_s$  – скорость звука.

Однако в наиболее интересной области, где разупорядоченная система близка к точке исчезновения сверхтекучести, эти энергии одного порядка: переход должен иметь место при  $K \sim \frac{2}{3}$ ,  $K = \frac{C_s}{\pi\Lambda_s}$  [63], и из уравнений (2.7), (2.8) следует, что

$$\frac{E_{ph}^{(1)}}{E_{sc}^{(M)}} = K. \quad (2.9)$$

Таким образом, при  $K \sim 1$  низкоэнергетическая часть спектра бозонной цепочки должна содержать *сверхтоковые (SL)* и фононные уровни. “Сверхсвойства” этих сверхтоковых уровней должны проявляться в стабильности относительно беспорядка (вплоть до точки перехода): даже в сильно разупорядоченной системе расщепление сверхтоковых уровней должно быть мало. Расщепление нижних фононных уровней также должно быть мало, однако можно ожидать, что оно будет больше, чем у сверхтоковых уровней и будет иметь особенности при фазовом переходе при достижении критической величины беспорядка. Кроме того, исследование расщеплений может дать качественную информацию о сверхтекучести, в то время как из значений энергии наиболее низколежащих состояний можно вычислить значения макроскопических параметров сверхтекучести  $\Lambda_s$ ,  $C_s$  и  $K$  (см. уравнения (2.7), (2.8)).

Рассмотрим полную одномерную бозонную модель Хаббарда с диагональным беспорядком и без учета межузельного взаимодействия:

$$H = - \sum_{i=1}^{N_a} (a_i^+ a_{i+1} + a_i^+ a_{i-1}) + \frac{U}{2} \sum_{i=1}^{N_a} n_i(n_i - 1) + \sum_{i=1}^{N_a} \varepsilon_i n_i. \quad (2.10)$$

Рассмотрим случай несоизмеримого заполнения ( $N_b \neq N_a$ ), чтобы исключить появление моттовского перехода.

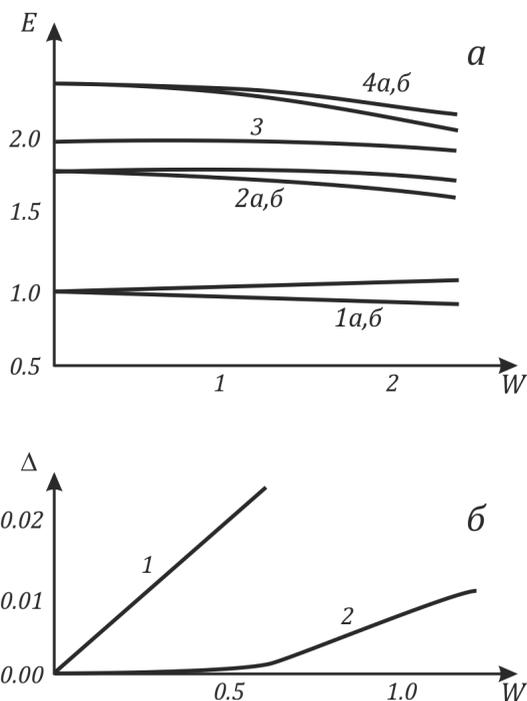


Рис. 2.6. Эволюция спектра при увеличении степени андерсоновского беспорядка  $W$ :  $a$  – общая картина,  $b$  – расщепление первого (нижнего) фононного (1) и первого сверхтокового (2) уровней.

$$N_a = 11; N_b = 7; U = 2.5$$

Соответствующий спектр представлен на рис. 2.6,  $a$ . Уровни  $1a$  и  $1b$  – суперпозиция однофононных состояний с минимальным импульсом  $\pm k_0$ ,  $k_0 = \frac{2\pi}{L}$ ; уровни  $2a$  и  $2b$  – суперпозиция двухфононных состояний  $\{k_0, k_0\}$  и  $\{-k_0, -k_0\}$ ; уровень  $3$  – двухфононное состояние  $\{k_0, -k_0\}$ ; уровни  $4a$  и  $4b$  – суперпозиция сверхтокового уровня с  $M = \pm 1$ . Значения уровней нормированы следующим образом: отсчет идет от основного состояния, и система единиц выбрана так, что полусумма уровней  $1a$  и  $1b$  равна единице. В такой нормировке значение энергии первого сверхтокового уровня совпадает с  $1/K$ , т.е., согласно [66], в точке перехода его величина должна быть равна 1.5.

Идентификацию уровней легко провести, если рассмотреть спектральную картину в предельных случаях для  $U \rightarrow \infty$  и  $U \rightarrow 0$  (при  $W = 0$ ). Предел  $U \rightarrow 0$  удобен для идентификации фононных линий, так как фононы превращаются в этом пределе в обычные невзаимодействующие частицы, а сверхтоковые уровни резко уходят в верх спектра. Случай  $U \rightarrow \infty$  можно использовать для анализа сверхтоковых уровней. В этом пределе модель (2.10) для  $W = 0$  эквивалентна идеальному ферми-газу с невырожденным основным состоянием и четырежды вырожденным первым возбужденным состоянием, причем два состояния из квартета являются предельным случаем фононного возбуждения с минимальным импульсом  $\pm k_0$ , а два других – предельным случаем сверхтоковых уровней с  $M = \pm 1$  – сдвижкой поверхности Ферми как единого целого. Отличить сверхтоковые состояния от фононных можно также путем расчета коррелятора "плотность-плотность". При этом можно исследовать состояния именно вблизи интересующего диапазона параметров  $U, t$ , не рассматривая предельные случаи. Как следует из расчетов, в сверхтоковых состояниях (рис. 2.7), в противоположность фононным возбуждениям, коррелятор демонстрирует монотонное поведение как функция  $|i - j|$ . Более того,  $SL$ -коррелятор "плотность-плотность" даже количественно совпадает с таким же коррелятором для основного состояния, в полном соответствии с фундаментальными принципами сверхтекучести (см. рис. 2.7), так как система движется как единое целое без изменения корреляционных свойств.

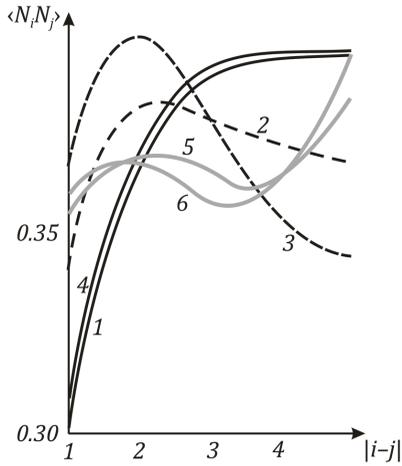


Рис. 2.7. Коррелятор “плотность-плотность” для фоннных и сверхтоковых возбуждений в отсутствие андерсоновского беспорядка: 1 – основное состояние; 4 – первое сверхтоковое состояние; 2,3,5,6 – фоннные возбуждения (2 – однофоннное, 3 – двухфоннное и т.д.).  $U = 3.5; W = 0$

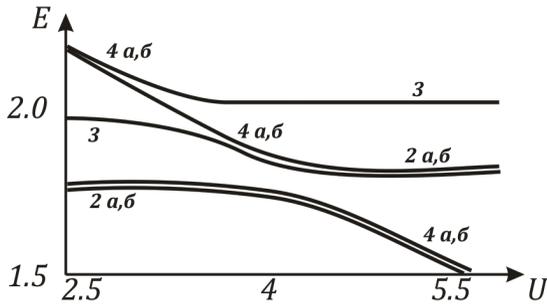


Рис. 2.8. Эволюция спектра при увеличении параметра узелного отталкивания  $U$ . Общая картина.  $N_a = 11; N_b = 7; W = 0.5$

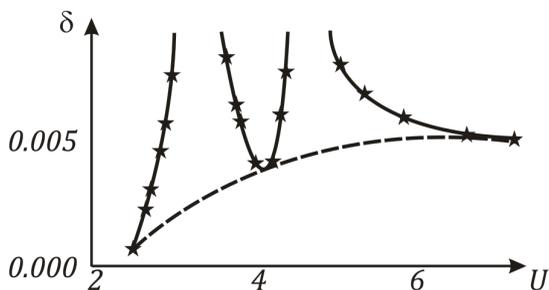


Рис. 2.9. Эволюция спектра при увеличении параметра узелного отталкивания  $U$ . Расщепление первого сверхтокового уровня.  
 $N_a = 11; N_b = 7; W = 0.5$

Таким образом, анализ спектра позволяет надежно идентифицировать уровни и выделить сверхтоковые состояния, а также рассчитать макроскопический параметр  $K$  как отношение энергии одного фона в энергии первого сверхтокового уровня (2.9).

Рис. 2.6, *а* показывает эволюцию спектра с увеличением степени беспорядка  $W$ . На рис. 2.6, *б* продемонстрировано качественное различие расщепления сверхтоковых и фоновых уровней. Первое существенно нелинейно, в то время как последнее просто пропорционально  $W$ . Расщепление сверхтоковых уровней очень мало вплоть до  $W = 0.6$ , а затем резко возрастает и становится сравнимым с фоновым, что похоже на фазовый переход. Интересно, что при этом параметр  $K$  близок к  $1/2$ , в то время как по результатам [66] в этой области система должна оставаться сверхтекучей.

Эволюция спектра с увеличением  $U$  показана на рис. 2.8. Картина здесь более сложная из-за гибридизации сверхтоковых уровней с фоновыми. Однако если не брать во внимание гибридизационные резонансы с уровнями 2 и 3, поведение расщепления сверхтоковых уровней (рис. 2.9) очень похоже на

представленное на рис. 2.6, б, и особенности возникают при  $K = 1/2$ . Такое различие в поведении расщепления сверхтоковых и фоновых уровней свидетельствует о существенно различной природе сверхтоковых состояний и нормальных возбуждений.

## **2.4. Критерии фазовых переходов для одномерных систем. Особенности одномерной ситуации. Понятие о ренормализационной группе. Одномерная модель Жиамарчи и Шульца**

В асимптотическом пределе больших размеров системы ( $N_a \gg 1$ ) модель (2.1) можно аналитически исследовать с помощью *ренормгруппового анализа*. Подробное изложение этого подхода выходит за рамки книги, рассмотрим здесь основные положения и результаты, которые будут необходимы в дальнейшем.

После преобразования гамильтониана (2.1) в длинноволновом пределе в  $d$ -мерном случае к  $(d + 1)$ -мерному эффективному гидродинамическому действию в терминах сверхтекучей плотности  $\rho_s$ , сжимаемости  $\kappa$  и фазы  $\Phi$ , возможно применение процедуры *ренормирования*. Согласно Жиамарчи и Шульцу [66], она заключается в последовательном увеличении масштабов рассматриваемой системы с учетом мелкомасштабных корреляций предыдущей итерации с помощью эффективной перенормировки взаимодействия. В результате появляется возможность построения рекуррентных соотношений, которые в термодинамическом пределе ( $N_a \gg 1$ ) можно записать в дифференциальной форме. Такая процедура справедлива, если характерные корреляционные длины велики или сравнимы с масштабом системы, что выполняется в присутствии дальнего недиагонального порядка (например, при наличии сверхтекучих корреляций). После процедуры перенормировки имеем дифференциальные соотношения, определяющие поведение

макроскопических параметров системы от ее размера [63, 66]. В соизмеримой ситуации в отсутствие беспорядка получаются следующие ренормгрупповые уравнения:

$$\begin{cases} \frac{dK}{d\lambda} = w^2; \\ \frac{dw}{d\lambda} = \left(2 - \frac{p^2}{K}\right)w. \end{cases} \quad (2.11)$$

Здесь  $K = \frac{1}{\pi\sqrt{\rho_s k}}$  – макроскопический параметр теории (тот же, что и в (2.9)),  $\lambda = \ln N_a$ ,  $p$  – знаменатель в факторе заполнения ( $p = N_b/N_a$ );  $w$  – вспомогательный параметр. Параметр  $K$  является также показателем степени в асимптотической координатной зависимости дальнего недиагонального порядка (сверхтекучих корреляций):

$$\langle a_i^+ a_j \rangle \sim |x_{ij}|^{-K/2} \text{ при } x_{ij} \gg 1. \quad (2.12)$$

Как видно из (2.11), критическое значение (особая точка уравнений (2.11))  $K = 1/2$  (для соизмеримой бозе-модели  $p = N_b/N_a = 1$ ), оно соответствует в термодинамическом пределе переходу “сверхтекучесть – моттовский изолятор”. Заметим, что уравнения (2.11) не зависят от конкретного вида взаимодействия в гамильтониане (2.1), они справедливы и для “hard-core”- и для “soft-core”-бозонов в соизмеримой ситуации.

Уравнения (2.11) совпадают с соответствующими ренормгрупповыми уравнениями двумерной XY-модели, поэтому вблизи фазового перехода должно наблюдаться кosterлиц-таулессовское поведение моттовской щели [67]:

$$\Delta \sim \exp \left\{ -b \left[ 1 - \frac{t}{\left(\frac{t}{U}\right)_c} \right]^{-1/2} \right\}, \quad (2.13)$$

где  $\left(\frac{t}{U}\right)_c$  – критическое значение модели (2.1), соответствующее точке фазового перехода;  $b$  – неуниверсальный параметр теории.

Знание точной зависимости макроскопического параметра  $K$  от размеров системы играет очень важную роль для численных методов, где эта информация может позволить приблизиться к реальным макроскопическим масштабам и корректно оценить критические значения модели (2.1).

Фазовый переход “сверхтекучесть – бозе-стекло” в разупорядоченной бозонной цепочке описывается другой парой ренормгрупповых уравнений:

$$\begin{cases} \frac{dK}{d\lambda} = Kw^2; \\ \frac{dw}{d\lambda} = \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{K}\right)w. \end{cases} \quad (2.14)$$

Из (2.14) следует, что критическое значение параметра  $K$  в этом случае  $K = 2/3$ .

## **2.5. Теоретические исследования критических точек в бозонной модели Хаббарда. Редуцированная и hard-core бозонные модели Хаббарда**

В этом разделе используем результаты точной диагонализации для одномерной модели Бозе – Хаббарда, чтобы применить уравнения ренормгруппы (РГ) в точке перехода “сверхтекучесть – изолятор” и продемонстрировать, что комбинированный метод “ренорм-группа + точная диагонализация” дает очень точный метод экстраполяции результатов по конечным системам к термодинамическому пределу, и, в частности, может быть использовано в качестве метода определения критических параметров гамильтониана Бозе – Хаббарда [64].

Главные причины трудности определения и различия результатов по критической точке “сверхтекучесть – моттовский изолятор”

становятся ясны из макроскопической теории этого фазового перехода в одномерной ситуации: в одномерном случае эффекты конечного размера уменьшаются *логарифмически медленно с возрастанием размера системы*. Другими словами, необходим *экспоненциально большой* кластер для наблюдения макроскопического критического поведения.

Однако есть способ обойти эту проблему. Действительно, из макроскопической теории следует, что мезоскопическое поведение системы в области фазового перехода универсально (например, подчиняется РГ-уравнениям), неизвестны только конкретные значения соответствующих макроскопических параметров ( $K, (t/U)_c$  и т.п.). Это мезоскопическое поведение можно наблюдать численно, фиксируя эти неизвестные параметры и используя макроскопическую теорию для экстраполяции результатов на бóльшие (в конечном итоге, на бесконечные) системы для получения критических параметров гамильтониана. Покажем в данном разделе, как это сделать практически. Подчеркнем, что предлагаемый метод может быть использован для различных моделей систем, испытывающих фазовый переход и описываемых вблизи фазового перехода мезоскопическими уравнениями (типа РГ-уравнений (2.11), (2.14)).

Исследуем переход “сверхтекучесть – моттовский изолятор” для соизмеримой системы. Этот подход позволяет описать также фазовый переход “сверхтекучесть – бозе-стекло” для разупорядоченной системы с любым заполнением, описываемый РГ-уравнениями (2.14)).

Рассмотрим еще раз РГ-уравнения (2.11) для одномерной сверхтекучей жидкости в соизмеримой системе:

$$\begin{cases} \frac{dK}{d\lambda} = w^2; \\ \frac{dw}{d\lambda} = \left(2 - \frac{p^2}{K}\right)w. \end{cases} \quad (2.15)$$

В то время как величину  $K(\lambda)$ , зависящую от  $C_s$  и  $\Lambda_s$ , можно определить из низколежащих уровней спектра (см. предыдущий раздел), параметр  $w(\lambda)$  может быть найден только расчетом из (2.15). Для этого используем первый интеграл уравнений (2.15):

$$Q\left(\frac{2K(\lambda_1)}{p^2}, \frac{2K(\lambda_2)}{p^2}, c\right) = 4(\lambda_2 - \lambda_1);$$

$$Q(a, b, c) = \int_a^b \frac{dx}{x - \ln x - c}. \quad (2.16)$$

Константа  $c$  появляется в результате интегрирования по переменной  $w$  и зависит от параметров и формы микроскопического гамильтониана. Как видно, она определена, если известны величины  $K$  для двух различных размеров системы.

Если система описывается универсальными соотношениями (2.15), то величина  $c$  не должна зависеть от выбора  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  (с точностью до незначительных поправок на конечный размер к уравнениям (2.15)). Тогда, задавая величины  $c$  и  $K(\lambda_1)$  ( $\lambda_1$  следует выбирать наибольшее возможное для численного анализа), можно получить из (2.16) величину  $K$  для любого  $\lambda_2$ . Соответствующее значение сверхтекучей жесткости тогда определяется из  $\Lambda_s(\lambda_2) = \frac{C_s}{\pi K(\lambda_2)}$ .

В сверхтекучей фазе постоянная  $c$  всегда меньше единицы, и значение  $c = 1$  соответствует точке перехода, в которой  $K(\lambda_2 \rightarrow \infty) = \frac{p^2}{2}$ .

Таким образом, чтобы определить критические параметры гамильтониана, необходимо найти такую их комбинацию, которая удовлетворяет соотношению (2.16) при  $c = 1$ . Задача сводится буквально к методу деления отрезка пополам вплоть до локализации критического параметра с необходимой точностью.

При расчете необходимо также учитывать следующее: уравнение (2.16) имеет второй (нефизический) корень, лежащий в области моттовского изолятора. Однако можно показать, что соответствующие решения имеют место только при  $K(\lambda_1), K(\lambda_2) > \frac{p^2}{2}$  и, таким образом, легко отделяются от искомым физических решений.

Приведем теперь конкретные численные результаты. Рассмотрим с помощью метода точной диагонализации несколько бозонных моделей Хаббарда (см. гамильтониан (2.1)) с запретом и без него на максимально возможное число заполнения:

$$H = -t \sum_i (e^{i\theta/N_a} a_i^+ a_{i+1} + h.c.) + \frac{U}{2} \sum_i n_i(n_i - 1) + V \sum_i n_i n_{i+1}. \quad (2.17)$$

Использованы периодические граничные условия и введена калибровочная фаза  $\theta$ , которая необходима для расчета сверхтекучей жесткости  $\Lambda_s$  из следующего соотношения [64]:

$$\Lambda_s = \lim_{\theta \rightarrow 0} 2N_a \frac{E_0(\theta) - E_0(0)}{\theta^2}, \quad (2.18)$$

где  $E_0(\theta)$  – энергия основного состояния при калибровочной фазе  $\theta$ . Такой способ расчета  $\Lambda_s$  более точен, чем основанный на исследовании первого сверхтокового уровня, так как рассчитывается энергия только основного состояния. Из уравнения (2.18) и скорости звука, полученной из однофононной энергии  $E_{ph}(m) = \frac{2\pi}{N_a} m C_s$ , можно получить  $K = \frac{C_s}{\pi \Lambda_s}$  и решить уравнения (2.16). Наиболее удобно выбрать сектор по импульсу возмущений  $m = 1$ ,  $E_{ph}(1) = E_1 - E_0$ , где  $E_1$  и  $E_0$  – низшие уровни в секторах с единичным и нулевым импульсом соответственно.

Прежде всего, метод "ренорм-группа + точная диагонализация" был оттестирован на точно решаемой модели hard-core-бозонов с фактором заполнения  $p = 1/2$ . В этой модели, как известно, имеет место фазовый переход *сверхтекучесть – изолятор* при  $V/t = 2$ .

Таблица 2.1. Критическое значение  $(V/t)_c$  как функция размера системы. Модель hard-core бозонов с  $p = 1/2$

$N_a^{(2)}/N_a^{(1)}$	$(V/t)_c$
24/22	1.937
22/20	1.927
20/18	1.914
18/16	1.898

В табл. 2.1 представлены данные для одномерных hard-core бозонов с числом узлов вплоть до  $N_a = 24$  ( $N_b = N_a/2$ , размерность базиса системы 2704156).  $N_a^{(1)}$  и  $N_a^{(2)}$  обозначают два близких размера системы;  $\lambda_1 = \ln N_a^{(1)}$ ;  $\lambda_2 = \ln N_a^{(2)}$ ;  $(V/t)_c$  – значение отношения  $V/t$ , при котором уравнение (2.16) удовлетворяет при  $c = 1$  заданным  $N_a^{(1)}$  и  $N_a^{(2)}$ .  $N_a^{(1)}$  выбирается как можно ближе к  $N_a^{(2)}$  ( $N_a^{(1)} = N_a^{(2)} - 2$ ) для минимизации эффектов конечного размера.

Представленная последовательность данных стремится к точному макроскопическому пределу  $(V/t)_c$ . Действительно, как следует из табл. 2.1, величина  $(V/t)_c$  как функция  $x = 1/N_a^{(2)}$  имеет монотонно спадающую производную при стремлении  $x$  к нулю. Отсюда немедленно следует, что предельное значение  $(V/t)_c$  должно быть расположено между двумя точками, одна из которых соответствует минимальному  $x = x^*$ , а другая является экстраполяцией к нулю по  $x$  прямой линии, соединяющей  $x^*$  и предыдущую точку (рис. 2.10). При этом данная оценка погрешности является оценкой сверху.

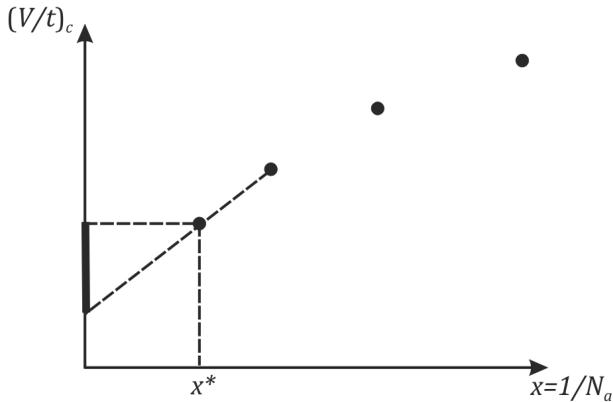


Рис. 2.10. Верхняя и нижняя границы для  $(V/t)_c$

В результате имеем:

$$(V/t)_c = 1.99 \pm 0.05 \text{ (hard – core – бозоны)}. \quad (2.19)$$

Таким образом, точный результат воспроизведен с относительной погрешностью около 2.5 %.

Рассмотрим теперь полную бозонную модель, описываемую гамильтонианом (2.17) без ограничений на числа заполнения. Данный метод позволяет исследовать модель не только с учетом узельного отталкивания  $U$ , но также с учетом межчастичного взаимодействия  $V$ , однако это не приводит к качественным изменениям в фазовой диаграмме. Для сравнения результатов с другими известными данными оставим только параметр  $U$  во взаимодействии. Из представленных в табл. 2.2 данных аналогично предыдущему случаю можно получить, что при факторе заполнения  $p = 1$  фазовый переход имеет место при

$$(t/U)_c = 0.304 \pm 0.002 \text{ (полная бозонная модель)}. \quad (2.20)$$

Хотя максимальный исследованный размер системы здесь в два раза меньше ( $N_a = 12$ ;  $N_b = N_a$ , размерность базиса системы

1352078), чем в случае hard-core-бозонов, относительная точность выше – меньше 1 %.

Таблица 2.2. Критическое значение  $(t/U)_c$  как функция размера системы. Полная бозонная модель с  $p = 1$

$N_a^{(2)}/N_a^{(1)}$	$(t/U)_c$
12/11	0.3059
11/10	0.3062
10/9	0.3068
9/8	0.3078

Исследуем теперь подобным образом *редуцированную* модель (2.17), в которой запрещено заполнение узлов, большее 2. Оказывается, что уравнение (2.16) с константой  $c = 1$  не имеет физического решения при  $U = 0$ , это означает, что система, описываемая редуцированной моделью, всегда находится в состоянии изолятора в области  $U \sim 0$ . В частности, вблизи критической точки полной модели,  $t/U \sim 0.3$ , параметр  $K$  для редуцированной модели для системы с  $N_a = 16$  (размерность базиса 5196627) близок к 0.7, т.е. система находится в состоянии мотовского изолятора. Зависимость  $K$  как функции размера системы при  $U = 0$  представлена в табл. 2.3. Видно, что  $K$  немного меньше, чем критическое значение 0.5, но имеет тенденцию к росту. Заметим, что поведение  $K(N_a)$  при  $U = 0$  плохо описывается уравнением (2.16), и экстраполяция с его помощью на большие  $N_a$  невозможна.

Таблица 2.3. Параметр  $K$  как функция размера системы. Редуцированная модель с  $p = 1$  при  $U = 0$

$N_a$	$K$
16	0.4523
15	0.4516
14	0.4505
13	0.4492
12	0.4477

Заметим, что величина  $K$  становится больше 0.5 для системы с  $N_a = 16$  при  $t/U \sim 0.6$ . Можно полагать это значение нижней границей точки перехода, так как более точная процедура экстраполяции (2.16) для редуцированной модели не работает. Физически такое поведение в случае редуцированной модели можно объяснить существенной ролью запрета на числа заполнения, приводящего в итоге к эффективному добавочному узельному отталкиванию.

Для выяснения роли запрета на числа заполнения была исследована также модель с ограничением на число бозонов выше трех:  $n_i < 4$  при заполнении  $p = 1$  (размерность базиса для системы с числом узлов  $N_a = 13$  в этом случае равна 1858156). Оказывается, что критические свойства такой системы близки к свойствам полной модели. Для точки перехода получается близкое значение и с такой же высокой точностью:

$$(t/U)_c = 0.313 \pm 0.003 \text{ (бозонная модель с } n_i < 4 \text{)}. \quad (2.21)$$

Величина  $K \sim 0.2$  при  $U = 0$ , т.е. система находится в сверхтекучей области вдали от моттовской фазы. Таким образом, наличие трехкратно заполненных узлов является уже достаточно хорошим приближением для описания полной бозонной модели Хаббарда.

Для макроскопической системы анализ критических точек возможен только с помощью квантовых алгоритмов Монте-Карло. На рис. 2.11 показана фазовая диаграмма для полной бозонной модели с числом узлов 16 и 50, полученная при помощи дискретного квантового алгоритма Монте-Карло. Как показывает анализ [68], система с числом узлов 30-40 в данной ситуации уже является макроскопически большой для расчета критического значения  $(t/U)_c$  фазового перехода в термодинамическом пределе. Из рис. 2.11 следует, что точка перехода локализована в диапазоне  $0.29 < \frac{t}{U} < 0.32$ . Для уточнения критического значения можно использовать известную в одномерной ситуации зависимость диэлектрической щели (2.13), что дает

$(t/U)_c = 0.300 \pm 0.005$ . Это значение согласуется с результатом, полученным методом экстраполяции данных точной диагонализации.

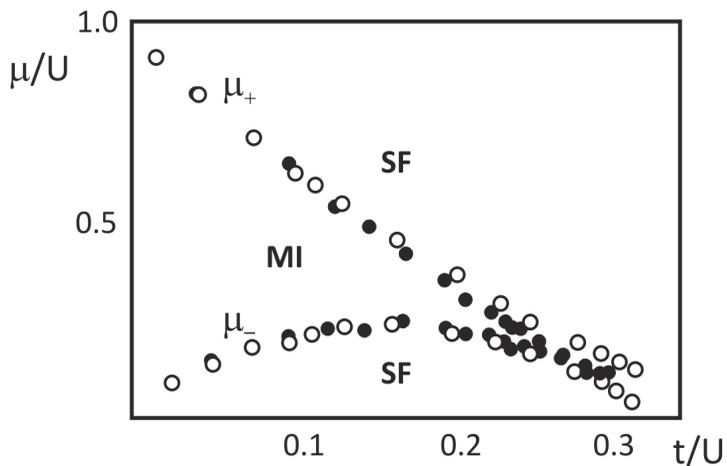


Рис. 2.11. Фазовая диаграмма для бозонной цепочки с числом узлов 16 (открытые круги) и 50 (сплошные круги). Температура  $T = 0.0625t$ . **MI** – фаза моттовского изолятора, **SF** – фаза сверхтекучей жидкости

### 3. Бозе-конденсация в газовой фазе

Когда говорят о бозе-конденсации в реальных физических системах, как правило, имеют ввиду сверхтекучий гелий. Однако следует учитывать, что сверхтекучие  $^4\text{He}$  и  $^3\text{He}$  – квантовые жидкости, т.е. плотная конденсированная среда. В теории слабонеидеального бозе-газа бозе-конденсация понимается как конденсация бозе-частиц в основное состояние из разреженной газовой фазы. Степень разреженности газа оценивается параметром  $(na^3)$ , где  $n$  – плотность,  $a$  – длина рассеяния; для разреженного газа  $na^3 \ll 1$ .

#### 3.1. Спин-поляризованный водород. Осаждение над гелиевой поверхностью. Уровни энергии водородоподобных атомов и расщепление в магнитном поле

Проблема экспериментального наблюдения истинной бозе-конденсации наталкивалась на значительные экспериментальные трудности. Единственным известным бозе-газом до недавнего времени являлся спин-поляризованный водород [69], который остается газом вплоть до температуры абсолютного нуля, однако для его получения необходимы специальные магнитные ловушки и сверхнизкие температуры.

Первые попытки достичь области бозе-конденсации можно датировать 1983 г. [70]. Необходимо было довести спин-поляризованный водород до высокой плотности или низкой температуры: температура конденсации  $T_0 = 3.31 \frac{\hbar^2}{m} n^{2/3} = 74 \text{ мК}$  для плотности  $n = 10^{19} \text{ см}^{-3}$ .

Спин-поляризованный водород  $\text{H}\downarrow$  – газ в магнитном поле с атомами в двух расщепленных состояниях:  $|\alpha\rangle = |\downarrow\uparrow\rangle - \varepsilon|\uparrow\downarrow\rangle -$

основное состояние ( $\uparrow$  – спин электрона,  $\uparrow$  – спин протона),  $|\beta\rangle = |\downarrow\uparrow\rangle$  – чисто спиновое состояние,  $\varepsilon = \frac{\alpha}{4\mu_B H}$ ;  $\alpha = \frac{e^2}{\hbar c}$  – постоянная тонкой структуры.

Основная задача – получить дважды спин-поляризованный водород  $H \downarrow\downarrow$ . Это возможно, так как переход в молекулу  $H_2$  происходит за счет  $|\alpha\rangle - |\alpha\rangle$ -рекомбинации; с другой стороны,  $|\beta\rangle - |\alpha\rangle$ -релаксация, приводящая из  $H \downarrow\downarrow$  в  $H \downarrow$ , имеет малую скорость, так что состояние  $|\beta\rangle$  дважды спин-поляризованного водорода  $H \downarrow\downarrow$  – достаточно долгоживущее, и его время жизни больше, чем время жизни состояния  $H \downarrow$ , размываемого столкновениями  $|\alpha\rangle - |\alpha\rangle$  и осаждающегося в состояние  $H_2$ . При достижении плотности  $10^{17} \text{ см}^{-3}$  в  $H \downarrow\downarrow$  фактически остается чисто спиновое состояние, и этот бозе-газ можно сжать до больших плотностей.

Для охлаждения была использована технология предварительного охлаждения в криостатах растворения  $^3\text{He}$ - $^4\text{He}$  до температуры 200 мкК с дальнейшим сжатием до плотностей порядка  $10^{19} \text{ см}^{-3}$ . Систему удалось сжать до плотности  $3 \times 10^{19} \text{ см}^{-3}$  в объеме 1 мм<sup>3</sup> и в полях до 10 Тл, но этого оказалось недостаточно для достижения бозе-конденсации.

Отметим, что уже после наблюдения бозе-эйнштейновской конденсации в 1995 г. в атомарных газах щелочных элементов в 1998 г. группе из Курчатовского института [71] удалось представить данные по трехчастичной рекомбинации, свидетельствующие о бозе-конденсации атомарного спин-поляризованного водорода над поверхностью сверхтекучего гелия.

### **3.2. Магнитооптические ловушки. Эксперименты в щелочных металлах. Сверхнизкое охлаждение. Лазерное испарение. Наблюдение бозе-конденсата**

Прорыв в экспериментальной ситуации произошел в 1995 г. Сразу для трех изотопов щелочных металлов:  ${}^7\text{Li}$ ,  ${}^{23}\text{Na}$  и  ${}^{87}\text{Rb}$  наблюдали переход в конденсированное состояние [72 – 74]. При этом использовали магнитооптическую ловушку и лазерное охлаждение.

Выбор щелочных металлов диктовался структурой их верхних оболочек, идентичных атому водорода. Единственный  $s$ -электрон ведет себя по отношению к ионному остову так же, как и в атоме водорода, и таким же образом энергетические уровни расщепляются в магнитном поле. В итоге возникает уникальная возможность создать атом в чистом спиновом состоянии с противоположно направленными ядерным и электронным спином, т.е. сконструировать бозон с нулевым спином, с ненулевым магнитным моментом и с достаточно большой по сравнению с водородом массой. Это, во-первых, приводит к возможности создавать потенциальный рельеф для таких атомов с помощью магнитного поля, а, во-вторых, к возможности достижения критической температуры при плотности газа  $< 10^{18} \text{ см}^{-3}$  таких атомов. Атомы щелочных элементов имеют целочисленные спины (сумма ядерного и электронного), поэтому их квантовые магнитные моменты могут быть либо направлены по полю, либо против поля, либо иметь нулевую проекцию на направление поля. Для заполнения ловушки пригодны лишь те атомы, магнитные моменты которых направлены против поля. Энергия  $-\mu B$  таких атомов имеет минимум в центре магнитной ловушки. О тонкой и сверхтонкой структуре атомов в магнитной ловушке см. прил. 2.

Нейтральные атомы щелочных металлов, находясь в разреженном атомарном «облаке», взаимодействуют между собой ван-дер-ваальсовскими силами, с отталкиванием на малых расстояниях ( $\sim 1/r^{12}$ ) и притяжением на больших расстояниях ( $\sim 1/r^6$ ), что хорошо описывается, например, потенциалом Леннарда – Джонса («6 – 12»). Однако из-за относительной разреженности системы,  $na^3 \ll 1$ , достаточно ограничиться описанием на языке сечений рассеяния (или длин рассеяния  $a$ ), т.е. использовать приближение жестких шаров, взаимодействующих друг с другом с потенциалом  $U = 4\pi\hbar^2 an/m$ ,  $m$  – масса атома. Для рубидия и натрия длина рассеяния  $a$  положительна (57.7 Å и 27.5 Å соответственно), и атомы отталкиваются. Для  ${}^7\text{Li}$ , напротив, длина рассеяния отрицательна ( $a \sim -14$  Å), и энергия взаимодействия уменьшается с увеличением концентрации, так что конденсат стремится коллапсировать. В магнитной ловушке взаимодействие уравнивается кинетической энергией из-за давления газа, собранного в ограниченном объеме, и возможно сформировать метастабильный конденсат даже для атомов лития.

Принцип лазерного охлаждения можно кратко описать следующим образом. Предварительно охлажденное облако атомарного газа щелочного металла в диамагнитном состоянии переводится лазером в одно из возбужденных состояний, а именно в нижнее состояние  $|\alpha\rangle = |\downarrow\uparrow\rangle - \varepsilon|\uparrow\downarrow\rangle$ . Используются лазеры, настроенные на частоту чуть ниже частоты поглощения атомов, т.е. частоты перехода между расщепленными состояниями  $|\downarrow\uparrow\rangle \pm \varepsilon|\uparrow\downarrow\rangle$ . Тогда покоящийся атом не может поглощать кванты лазерного излучения. Но атом, движущийся навстречу лазерному пучку, благодаря эффекту Доплера может поглотить фотон. При этом атом получает импульс от фотона в сторону, противоположную направлению движения атома. Через некоторое время возбужденный атом излучит квант света, в среднем изотропно по всем направлениям. Таким образом, если облучать атомы со всех сторон одновременно, можно за несколько циклов облучения понизить их кинетическую энергию в

магнитной ловушке (рис. 3.1). Важно, что все эти процедуры можно проводить при комнатной температуре в лаборатории. Подробнее о лазерном охлаждении см. в прил. 3.

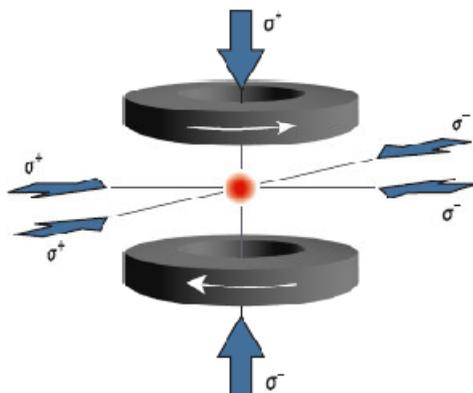


Рис. 3.1. Геометрия магнитооптической ловушки из [75]. Лазерные лучи шести направлений с круговой поляризацией пересекаются в центре ловушки

Лазерное охлаждение позволяет заполнить ловушку газом при очень низкой температуре (рекорд – 10 нК). Далее проводится испарительное охлаждение газа, индуцированное лазером. Профиль магнитного поля устроен так, что при добавлении ВЧ-поля происходит переворот проекции спина у более теплых атомов, и они не удерживаются магнитным полем и уходят из ловушки (происходит «обрезание максвелловских хвостов»). Таким образом, удастся существенно снизить температуру и попасть в область значений температуры меньше микрокельвина.

Магнитная ловушка имеет квадрупольную конфигурацию поля [76]. Плотность атомов достигает  $\sim 10^{11} \text{ см}^{-3}$  при температуре  $< 200 \text{ мкК}$ . Из центральной части ловушки атомы уходят благодаря большому градиенту поля, поэтому делают *лазерную затычку*, т.е. направляют в центральную область лазерный луч (например,  $\text{Ag}^+$ , 514 нм), и атомы начинают отталкиваться от

области, в которой лазерная интенсивность выше. С помощью дополнительных лазерных лучей удается также контролировать форму магнитной ловушки, меняя тем самым параметры конденсата.

Далее после мгновенного выключения магнитного поля ловушки в течение  $\sim 6$  мс измеряется коэффициент поглощения – фактически делаются «снимки» облака. Используется времяпролетная спектроскопия – время прохождения частицами заданного расстояния связывается с импульсом и, соответственно, со спектральной картиной распределения. Получаются фактически дифракционные картины от пространственного распределения атомов (рис. 3.2).

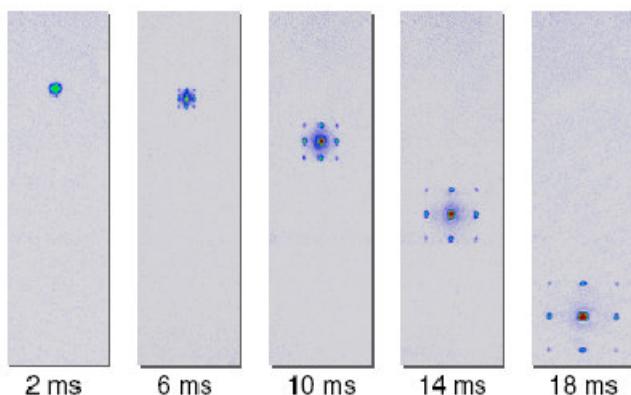


Рис. 3.2. Времяпролетные снимки после выключения ловушки из [75]. Наблюдаются узкие пики, демонстрирующие наличие фазовой когерентности на больших расстояниях на оптической решетке из 100000 узлов

При температурах  $\sim 15$  мкК для  $^{87}\text{Rb}$  облако разделяется на два – одно равномерно диффузно расходится, согласно кинетике обычного газа; другое остается вблизи ловушки и повторяет ее форму, испытывая легкие поперечные колебания, как пружина. Эта локализованная часть – бозе-эйнштейновский конденсат. В

первых экспериментах получали несколько сот атомов в конденсате (исходно в ловушке находилось  $10^5 \div 10^6$  атомов), сейчас – десятки тысяч.

К настоящему времени в бозе-конденсатах наблюдали различные эффекты, присущие этому коллективному основному состоянию: это и эффект Джозефсона, и интерференция конденсатов, и осцилляции массива конденсата, вихревые структуры (рис. 3.3), второй звук, истечение конденсата каплями и многое др.

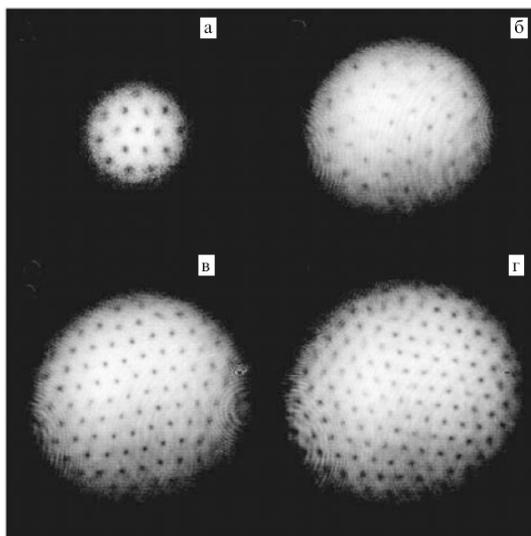


Рис. 3.3. Наблюдение решетки вихрей во вращающемся бозе-эйнштейновском конденсате из [77]. Показаны решетки из 16 (а), 32 (б), 80 (в) и 130 (г) вихрей, полученных по мере увеличения скорости вращения. Вихри кристаллизуются в треугольную решетку

Обсудим некоторые из этих экспериментов (см. [76]).

Первые три конденсата были приготовлены из атомов  $^{87}\text{Rb}$  [72],  $^{23}\text{Na}$  [73] и  $^7\text{Li}$  [74]. Трое ученых – Эрик А. Корнелл, Карл Э. Виман

и Вольфганг Кеттерле – были в 2001 г. удостоены Нобелевской премии.

Во всех опытах формировались взаимодействующие бозе-газы, все конденсаты приготавливались с помощью лазерного охлаждения и последующего ВЧ-испарения. В экспериментах с  $^{87}\text{Rb}$  [78] число атомов в конденсате было доведено до  $4 \times 10^4$  при температуре 280 нК. При этом температура конденсации оказалась близкой к критической температуре невзаимодействующего газа  $T_c = 3.31 \frac{\hbar^2}{m} n^{2/3}$ .

Конденсат колеблется, и наблюдаются его коллективные моды с  $m = 0$  и  $m = 2$  [79]. Мода  $m = 0$  соответствует аксиально-симметричным колебаниям, когда сжатие «капли» конденсата по радиусу сопровождается ее удлинением в продольном состоянии. Мода  $m = 2$  отвечает эллиптической деформации капли в поперечном направлении. Частоты соответствующих колебаний оказались в хорошем соответствии с теоретическими расчетами, согласно уравнению Гросса – Питаевского (см. 4 гл.).

В экспериментах с конденсатами атомов натрия [73, 79, 80] число атомов конденсата удавалось поднимать до  $5 \times 10^6$ . Согласно теории Ландау, число конденсатных атомов должно подчиняться соотношению  $N_0 = N \left(1 - \left(\frac{T}{T_c}\right)^{3/2}\right)$ . Такая зависимость и наблюдалась экспериментально, когда доля частиц в конденсате была меньше половины общего числа.

Отличительными являются эксперименты с конденсатами  $^7\text{Li}$ , так как атомы лития имеют отрицательную длину рассеяния, т.е. притягиваются. В этих условиях конденсат, с точки зрения теории, не может быть устойчивым, если число атомов в конденсате достаточно велико. Эксперименты показали [81], что максимальное число частиц в бозе-конденсате  $N_0$  составляет 1300, что близко к теоретическому предсказанию 1400 [82].

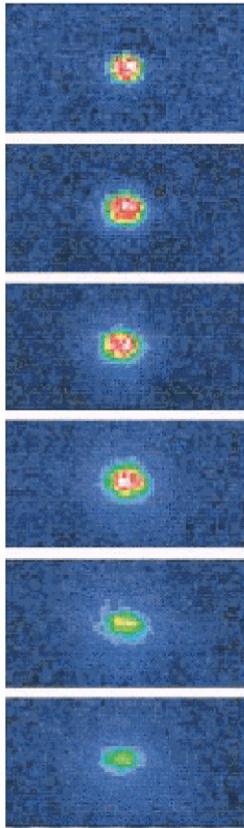


Рис. 3.4. Взрыв «бозе-новой» из [84].Изображения сверху вниз показывают эволюцию облака после того, как межатомное взаимодействие становится притягивающим, что вызывает коллапс

Эксперименты с конденсатом атомов лития с числом больше 1400 показывают наличие микровзрывов, сопровождающихся быстрым сжатием и разлетом облака атомов [83]. Такие микровзрывы свидетельствуют о коллапсе, т.е. о переходе в новое квантовое состояние с большей плотностью. Коллапс части конденсата сопровождается выделением тепла и взрывом конденсата. Обнаруженное явление напоминает взрыв сверхновой звезды, где гравитационное притяжение преодолевает отталкивание

электрон-нейтронной плазмы за счет принципа Паули (рис. 3.4). В конденсате, соответственно, притяжение преодолевает соотношение неопределенностей Гейзенберга.

Интересен эксперимент по истечению бозе-конденсата [85, 86]. На рис. 3.5 изображены падающие вниз капли конденсата в виде полумесяцев, названные «Atom Laser».

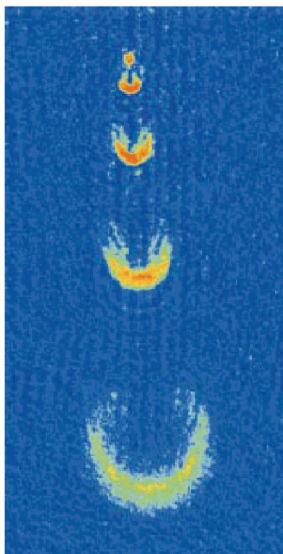


Рис. 3.5. «Атомный лазер» из [77]. Импульсы когерентных атомов натрия выводятся из бозе-эйнштейновского конденсата, заключенного в магнитную ловушку. Каждые 5 мс короткий импульс переводит часть атомов в захватываемое квантовое состояние. Эти атомы ускоряются вниз гравитационным полем, а их облако расширяется из-за отталкивающего взаимодействия. Наблюдения атомных импульсов выполнены методом регистрации поглощения

Речь идет фактически о некоторой аналогии между бозе-конденсатом и лазером. В бозе-конденсате накопление холодных атомов в ловушке аналогично накоплению фотонов в резонаторе. Если выключить ловушку или повернуть магнитные моменты атомов с помощью импульса ВЧ-поля, то можно освободить либо

конденсат, либо его часть. Именно такие свободные частицы и изображены на рисунке.

В эксперименте по интерференции бозе-конденсатов [87] магнитная ловушка для атомов натрия создавалась таким образом, что бозе-конденсат имел вид сильно вытянутой сигары. С помощью дополнительного лазерного луча этот конденсат можно разделить на две части с некоторым расстоянием  $d$  между конденсатами. После этого происходит одновременное выключение ловушки и лазерного луча, так что две половинки конденсата быстро расширяются в поперечном направлении и сравнительно медленно двигаются навстречу друг другу. В области их перекрытия образуется хорошо наблюдаемая картина интерференции с расстоянием между пучками, равным половине длины волны де Бройля  $\lambda$ . Сама длина волны определяется соотношением  $\lambda = \frac{2\pi\hbar t}{md}$ ,  $t$  – время наблюдения. Экспериментально наблюдаемая картина интерференции волн вещества с периодом 15 мкм соответствует кинетической энергии 0.5 нК, фактически равной энергии свободных частиц при более малой плотности разлетающегося конденсата, исходно находящегося в покое при большей плотности и имеющего температуру 100 нК. Наблюдаемая картина является наглядной демонстрацией неразличимости частиц и единой волновой функции для частиц двух конденсатов.

Начиная с 2002 г. появилась возможность конструировать бозонные оптические решетки [90]. В магнитооптическую ловушку вносят стоячие лазерные волны, создавая периодический потенциал, в результате чего атомы конденсата располагаются в периодические структуры – оптические решетки (рис. 3.6).

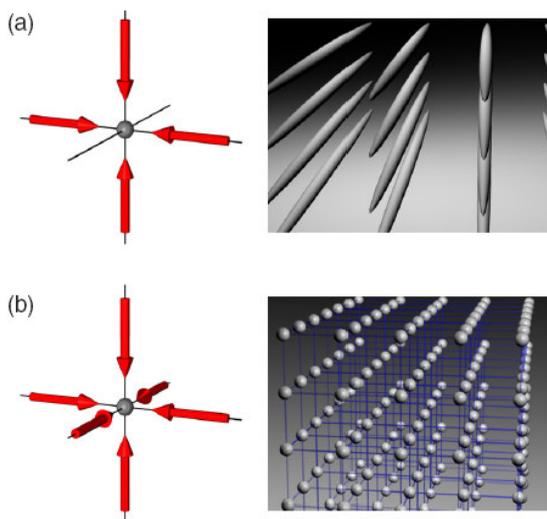


Рис. 3.6. Двумерная (a) и трехмерная (b) оптические решетки из [75]

Поведение этих искусственных кристаллов может быть описано моделью Бозе – Хаббарда, т.е. появилась экспериментальная возможность проверить все богатство фазовой диаграммы такой модели, в частности наблюдать фазовые переходы «сверхтекучесть – изолятор».

### 3.3. Трехчастичная рекомбинация и закон “1/6”. Трехмерный и двумерный газ – проблемы конденсации. Уравнение Гросса – Питаевского

Наблюдать бозе-конденсацию можно и опосредованно, исследуя физические свойства ансамбля атомов.

Бозе-конденсацию можно тестировать по измерению скорости трехчастичной рекомбинации – неупругого процесса, в результате которого три бозе-частицы аннигилируют. Еще в 1981 г. теоретики Курчатовского института (Каган, Свистунов, Шляпников)

предсказали, что трехчастичная диполь-дипольная рекомбинация в адсорбированном на жидком гелии атомарном водороде является ведущим каналом распада. Это дает возможность детектировать фазовый переход по изменению времени распада при понижении температуры. Более того, теоретически было предсказано, что фазовый переход во взаимодействующем бозе-газе приводит к сильному падению скорости трехчастичной рекомбинации как в трехмерном, так и в двумерном случаях. Причем уменьшаться она должна ровно в 6 раз (3!) – так называемый «закон 1/6».

Этот эффект легко понять физически, рассматривая отдельный элементарный процесс, в котором участвуют три тождественные частицы. Необходимо провести соответствующую симметризацию волновой функции (и появляется фактор 3!). Если частицы находятся в конденсате, то такая симметризация не нужна, и вероятность процесса падает на этот численный коэффициент. Численные исследования в рамках модели решеточных взаимодействующих бозонов подтвердили этот результат [88] (рис. 3.7).

Интересно, что летом 1997 г. закон «1/6» наблюдали экспериментально на  $^{87}\text{Rb}$ , в полном соответствии с предсказаниями теории. Наблюдали его на достаточно макроскопической системе, в магнитной ловушке было собрано  $10^9$  атомов. Температура понижалась при помощи испарительного охлаждения вплоть до 200 нК. Скорость трехчастичной рекомбинации, измеренная по флуоресценции, падала примерно в шесть раз при достижении температуры ниже критической (670 нК).

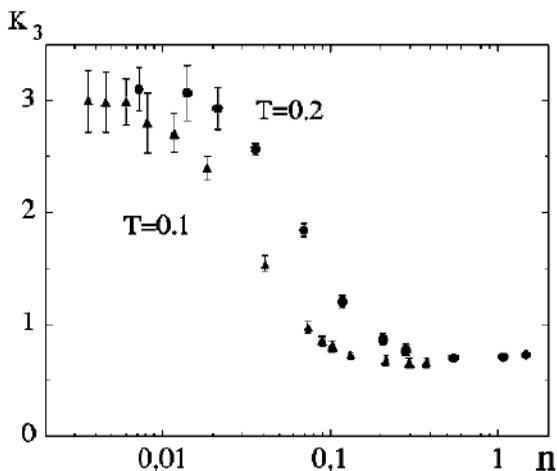


Рис. 3.7. Трехчастичный коррелятор, пропорциональный скорости трехчастичной рекомбинации, в зависимости от плотности системы. При увеличении плотности система переходит в состояние конденсата, что приводит к уменьшению коррелятора в 6 раз [88]

Таким образом, этот экспериментальный результат является весомым доказательством того, что наблюдаемые в изотопах щелочных металлов резкие изменения скорости неупругих процессов при понижении температуры являются прямым следствием перехода системы в бозе-конденсат.

Известно [89], что в 2D нет истинной бозе-конденсации. Однако теория предсказывает квазиконденсацию, т.е. наличие в системе областей макроскопической величины, в которых система ведет себя как конденсат – по сценарию типа Костерлица – Таулесса [67], поэтому и в этом случае закон «1/6» должен наблюдаться. В 1998 г. в Курчатовском институте наблюдали закон «1/6» на спин-поляризованном водороде, адсорбированном на поверхности сверхтекучего гелия.

Для теоретического описания экспериментально наблюдаемой кинетики и термодинамики взаимодействующих конденсатов

используется известное уравнение Гросса – Питаевского для волновой функции конденсата  $\Psi$ :

$$i\hbar \frac{d\Psi}{dt} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta\Psi + \frac{4\pi\hbar^2 a}{m} N|\Psi|^2\Psi + U(r)\Psi, \quad (3.1)$$

где  $n = N|\Psi|^2$  – плотность частиц;  $U(r)$  – внешнее поле;  $a$  – сечение рассеяния. Это уравнение описывает как нормальную, надконденсатную часть, ее разлет из ловушки и пространственную эволюцию после выключения магнитного поля, так и конденсат, его коллективные свойства. Из этого уравнения можно вывести коллективные возбуждения в системе. Фононы, в частности, имеют скорость звука, равную

$$c_s = \sqrt{\frac{3\pi\hbar^2 an}{m^2}} \sim 2 \times 10^4 \frac{\text{см}}{\text{с}}. \quad (3.2)$$

Динамические решения уравнения Гросса – Питаевского рассматриваются в гл. 4.

### **3.4. Бозонные оптические решетки. Фазовые переходы «сверхтекучесть – моттовский изолятор». Оболочечная структура**

В последнее время в связи с развитием экспериментальной технологии построения бозонных оптических решеток [90], о которых упоминалось в разделе 3.2, появилась уникальная возможность для экспериментаторов напрямую сконструировать систему, описываемую именно бозонной моделью Хаббарда.

Возможность управления параметрами таких искусственных «кристаллов», а именно реализации 1-, 2- и 3-мерных структур с контролируемой глубиной потенциала, периодом решетки и межчастичным взаимодействием, позволяет наблюдать богатую фазовую диаграмму получившейся системы решеточных бозонов. В частности, наблюдаются фазовые переходы «сверхтекучесть –

моттовский изолятор», тестируемые по распределению поглощения атомного облака, измеряемого после выключения оптического и магнитного потенциалов. На рис. 3.8 показано появление интерференционных пиков в зависимости от величины оптического потенциала, демонстрирующих переход от фазы моттовского изолятора к фазе сверхтекучей бозонной жидкости [91, 92].

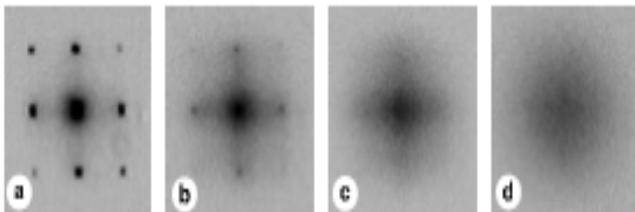


Рис. 3.8. Картина поглощения атомарного облака в зависимости от величины оптического потенциала  $V$  [91]: а)  $V = 8E_R$ ; б)  $V = 14E_R$ ; в)  $V = 18E_R$ ; д)  $V = 30E_R$ .  $E_R$  – однофотонная энергия отдачи

Наиболее адекватной моделью, описывающей реализующуюся на эксперименте систему решеточных бозонов, является модель Бозе – Хаббарда:

$$H = -t \sum_{\langle ij \rangle} (a_i^+ a_j + a_j^+ a_i) - \sum_i \mu_i n_i + \frac{U}{2} \sum_i n_i (n_i - 1). \quad (3.3)$$

Здесь  $a_i^+$  – оператор рождения атома на узле пространственной решетки  $i$ ,  $n_i = a_i^+ a_i$ . Внешний потенциал магнитной ловушки хорошо аппроксимируется параболическим потенциалом вида

$$\frac{\mu_i}{t} = V_0 + ki^2. \quad (3.4)$$

Величина матричного элемента туннелирования  $t$  и энергии взаимодействия на узле  $U$  контролируется глубиной периодического потенциала  $V$ . Более детально формирование системы решеточных бозонов в оптическом потенциале будет рассмотрено в гл. 4.

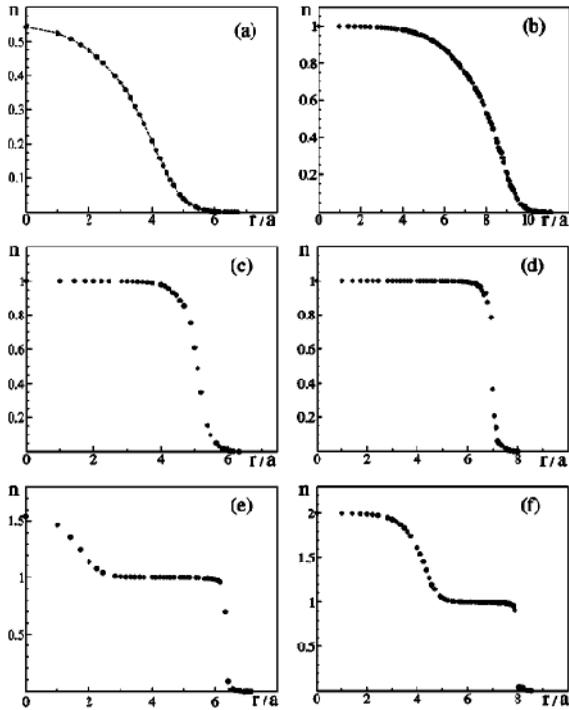


Рис. 3.9. Плотность распределения из [93] в зависимости от центра ловушки при различных силе взаимодействия  $U$  и факторе заполнения в центре ловушки: а –  $U/t = 24, U_0 = -11.08, \kappa = 0.195$ ; б –  $U/t = 32, U_0 = -28.08, \kappa = 0.195$ ; в –  $U/t = 80, U_0 = -65, \kappa = 0.977$ ; д –  $U/t = 80, U_0 = -90, \kappa = 1.03$ ; е –  $U/t = 80, U_0 = -120.08, \kappa = 2.00$ ; ф –  $U/t = 80, U_0 = -150, \kappa = 1.76; \mu_i/t = U_0 + \kappa i^2$

Моделирование квантовым алгоритмом Монте-Карло в непрерывном времени [93] на трехмерной системе с числом узлов до  $16^3$  показало, что при возрастании параметра взаимодействия  $U$  система действительно переходит из сверхтекучего состояния в моттовский изолятор, что видно из распределения плотности (рис. 3.9). Более того, наличие неоднородного параболического потенциала приводит к появлению чередующихся областей моттовского изолятора и сверхтекучих оболочек. На рис. 3.9,  $f$  видны две моттовские области с заполнением  $n = 1, 2$  и,

соответственно, две сверхтекучие оболочки, одна разделяет моттовские области, а другая реализуется на периферии ловушки.

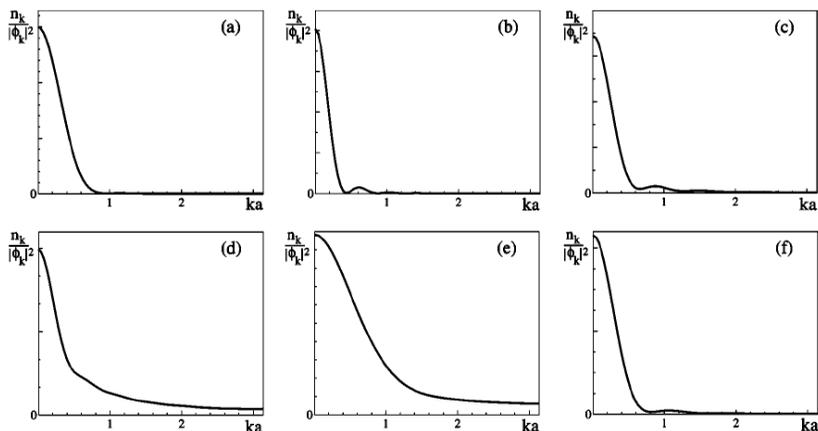


Рис. 3.10. Матрица плотности в импульсном представлении для системы, показанной на рис. 3.9

Распределение поглощения, наблюдаемое на эксперименте, можно связать с фурье-образом недиагональной матрицы плотности

$$n(\vec{k}) = |\varphi(k)|^2 \frac{1}{N} \sum_{ij} e^{i(\vec{r}_i - \vec{r}_j)} \langle a_i^\dagger a_j \rangle,$$

$\varphi(k)$  – фурье-образ функции Ванье на узле.

Расчет этой величины (рис. 3.10) показывает, что появление чередующихся областей моттовского изолятора и сверхтекучих оболочек приводит к тонкой структуре  $n(k)$ , так что появляются сателлитные пики при  $k \sim 1/a$ . По этим сателлитам можно определять наличие моттовского состояния.

Объяснение оболочечной структуры легко понять из следующих иллюстраций (рис. 3.11).

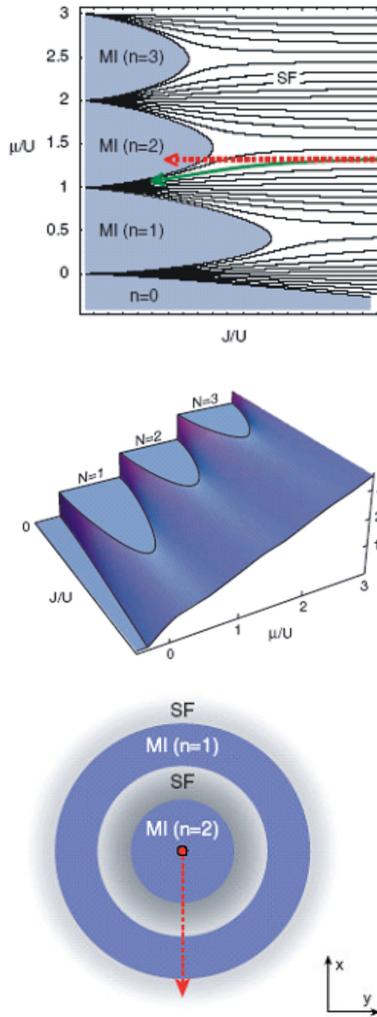


Рис. 3.11. Формирование оболочечной структуры

Неоднородный параболический потенциал приводит к неоднородной по радиусу плотности частиц и чередующейся картине моттовских и сверхтекучих областей в ловушке, согласно фазовой диаграмме.

Эту оболочечную структуру удалось наблюдать экспериментально [94, 95].

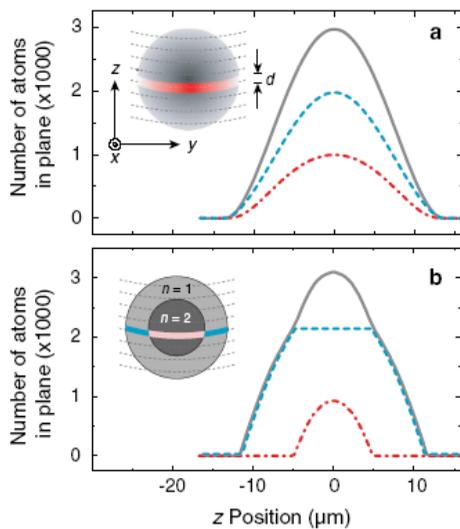


Рис. 3.12. Экспериментальное наблюдение оболочечной структуры [95]. Распределение плотности в магнитооптической ловушке в сверхтекучей фазе (а) и в фазе моттовского изолятора (б). Средняя и нижняя линии обозначают, соответственно, однократно и двукратно заполненные узлы, верхняя линия обозначает полную плотность

С помощью специального микроволнового излучения, сканирующего магнитную ловушку с высоким пространственным разрешением, удастся рассчитать число занятых однократно, двукратно и незанятых мест в оптической решетке. Результаты находятся в хорошем соответствии с теоретическими расчетами.

## Приложение 2. Расщепление спектров атомов в магнитном поле

Взаимодействие электронов атома со спином ядра приводит к расщеплению атомных уровней энергии, называемому *сверхтонким*. Результирующая сверхтонкая структура энергетических уровней, или *земановские сверхтонкие подуровни*, может быть характеризована следующим образом. Пусть полный электронный момент есть  $\vec{J}$ , полный спин ядра равен  $\vec{I}$ . Тогда полный момент атома равен  $\vec{F} = \vec{J} + \vec{I}$ .

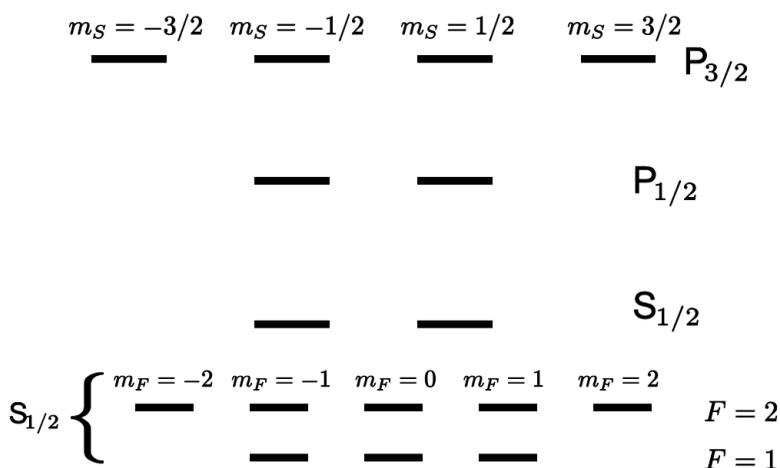


Рис. П2.1. Тонкая и сверхтонкая структура спектра атома для  $^{23}\text{Na}$ . Состояние  $P_{3/2}$  четырехкратно вырождено

Если выделенного направления в системе нет, то модуль вектора полного момента является интегралом движения, т.е. сохраняется величина  $\vec{F}^2$ . Собственные значения  $\vec{F}^2$  равны  $F(F + 1)$ , что определяет  $F$  – квантовые числа оператора полного момента атома. Эти числа принимают значения  $J + I$ ;  $J + I - 1$ ; ...;  $|J - I|$ ; состояние атома при этом вырождено по направлениям вектора  $\vec{F}$ . Если атом помещен в магнитное поле, вырождение снимается, и земановские сверхтонкие подуровни

можно характеризовать дополнительно проекцией  $m_F$  полного момента  $\vec{F}$  на ось, заданную вектором магнитного поля  $\vec{B}$ . Эти числа меняются от  $+F$  до  $-F$ . Для щелочных металлов (как  $^{87}\text{Rb}$  и  $^{23}\text{Na}$ )  $J = 1/2$ , спин ядра  $I = 3/2$ . Следовательно,  $F = 1$  или  $F = 2$  (рис. П2.1).

### Приложение 3. Принципы лазерного охлаждения

Рассмотрим газ из произвольных нейтральных атомов с основным состоянием при суммарном спине  $S = 0$  ( $m_s = 0$ ) и возбужденным состоянием при  $S = 1$  ( $m_s = -1, 0, +1$ ). В слабонеоднородном магнитном поле  $B_z(z) = bz$  зеемановское расщепление уровней будет равно  $\Delta E = \mu m_s B = \mu b m_s z$ . Облучим атомы лазерным излучением малой мощности  $\sigma^-$  в направлении  $-z$ , и излучением, соответственно,  $\sigma^+$ , распространяющемся в направлении  $+z$ . Если лазер откалиброван на частоту, которая несколько ниже резонансной частоты перехода (из  $S = 0$  в  $S = 1$  состояние) при расщеплении в поле  $B = 0$  (в центре ловушки), то атомы при  $z > 0$  будут поглощать больше  $\sigma^-$  фотонов, чем  $\sigma^+$  фотонов (так как частота лазера ближе к частоте перехода  $\Delta m = -1$ ) и, следовательно, будут чувствовать в среднем по времени силу, направленную к центру ловушки.

В свою очередь, для атомов, находящихся при  $z < 0$ , зеемановское расщепление перевернуто по энергетическим уровням, и снова эффективная сила действует на них в сторону области  $z = 0$ . Таким образом, эффективные силы, генерируемые лазерными лучами, действуют против движения атомов, и тормозят их, концентрируя в центре ловушки.

Эта схема может быть обобщена и на трехмерный случай (рис. П3.1).

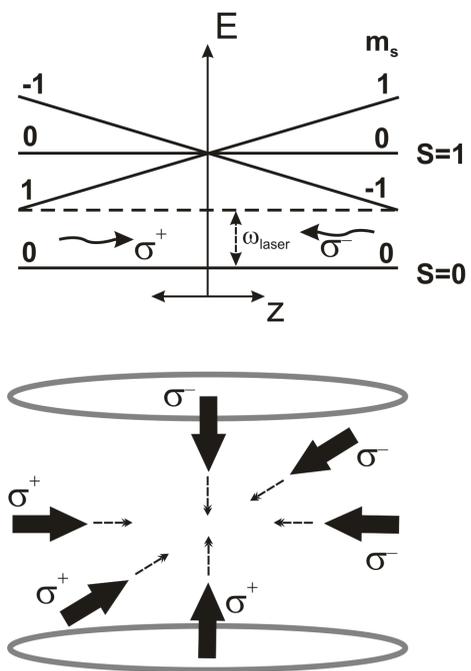


Рис. ПЗ.1. Диаграмма энергетических уровней атома, имеющего спин  $S = 0$  в основном состоянии и  $S = 1$  в возбужденном, помещенного в магнитное поле  $B(z) = bz$  (вверх) и схема магнитной трехмерной ловушки (внизу). Показана поляризация лазерных лучей, пересекающихся внутри ловушки

## 4. Солитоны в бозе-конденсатах

Когда слово «солитон» стали использовать в математике, под этим термином понималось решение в форме уединенной волны нелинейного вполне интегрируемого<sup>1</sup> уравнения (или системы уравнений). В физике очень мало моделей основано на вполне интегрируемых системах, потому понятие солитон в узком, строгом смысле, стало использоваться очень часто как синоним самого термина «уединенная волна». Солитоны в строгом смысле устойчивы по отношению к взаимным столкновениям и устойчивы относительно малых возмущений. Надо заметить, что устойчивость этих солитонов неасимптотическая, т.е. малые возмущения остаются малыми, а сам солитон, изменив свои параметры, отделяется в пространстве и времени от возмущения. Солитоны в широком смысле требуют исследования их устойчивости. Они могут быть просто долгоживущими объектами или могут быть устойчивыми только при определенных своих параметрах. Когда говорят о солитонах в бозе-эйнштейновских конденсатах, в действительности имеют в виду именно такие солитоны.

### 4.1. Облако бозе-конденсата в ловушке

Поскольку эволюция макроскопической волновой функции бозе-эйнштейновского конденсата описывается уравнением, очень похожим на нелинейное уравнение Шредингера, хорошо

---

<sup>1</sup> Если существует отображение нелинейного уравнения в частных производных или системы таких уравнений на бесконечномерную систему линейных уравнений типа угол-действие, то такое уравнение называется вполне интегрируемым. Частный случай одномерной системы типа угол-действие это  $\varphi_{,x} = k$ ,  $J_{,x} = 0$  Исходным является уравнение, описывающее гармоническую волну.

известным в теории солитонов, естественно предположить, что солитоны могут быть и в конденсате. Здесь целесообразно рассмотреть основы теории бозе-конденсата, помещенного в ловушку.

#### 4.1.1. Уравнение Гросса – Питаевского

Многочастичный гамильтониан, описывающий парно взаимодействующие бозоны, находящиеся во внешнем потенциальном поле  $U_{ext}(\vec{r})$ , в представлении вторичного квантования записывается как [96, 97]

$$H = \int d\vec{r} \Psi^+(\vec{r}) \left( -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + U_{ext}(\vec{r}) \right) \Psi(\vec{r}) + \frac{1}{2} \int d\vec{r} d\vec{r}' \Psi^+(\vec{r}) \Psi^+(\vec{r}') U(\vec{r} - \vec{r}') \Psi(\vec{r}') \Psi(\vec{r}), \quad (4.1)$$

где  $\Psi(\vec{r})$  и  $\Psi^+(\vec{r})$  – операторы бозонного поля (полевые операторы), уничтожающие и рождающие бозон в точке  $\vec{r}$ , потенциал  $U(\vec{r})$  описывает двухчастичное взаимодействие бозонов.

Приближение среднего поля (*приближение Боголюбова*) состоит в представлении полевого оператора  $\hat{\Psi}(\vec{r}, t)$ , взятого в гейзенберговском представлении, как суммы оператора рождения частиц в основном состоянии и во всех остальных состояниях:

$$\hat{\Psi}(\vec{r}, t) = \hat{\Phi}(\vec{r}, t) + \hat{\Psi}'(\vec{r}, t). \quad (4.2)$$

Предполагая, что макроскопическое число частиц находится в основном состоянии, оператор  $\hat{\Phi}(\vec{r}, t)$  заменяется числовой комплексной функцией  $\Phi(\vec{r}, t)$ :

$$\hat{\Psi}(\vec{r}, t) \approx \Phi(\vec{r}, t) + \hat{\Psi}'(\vec{r}, t), \quad (4.3)$$

так что  $\Phi(\vec{r}, t) = \langle \hat{\Psi}(\vec{r}, t) \rangle$ . Эта функция называется *волновой функцией конденсата* и имеет смысл параметра порядка. Она характеризует поведение недиагональных элементов

одночастичной матрицы плотности  $\rho(\vec{r}, \vec{r}'; t) = \langle \Psi^+(\vec{r}, t) \Psi(\vec{r}', t) \rangle$  при увеличении расстояния  $r = |\vec{r} - \vec{r}'|$  между точками рождения и уничтожения возбуждений квантового поля  $\Psi(\vec{r}, t)$ :

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \rho(\vec{r}, \vec{r}'; t) = \Phi^*(\vec{r}, t) \Phi(\vec{r}', t). \quad (4.4)$$

Свойство матрицы плотности (4.4) является математическим выражением существования *недиагонального дальнего порядка* в системе.

Уравнение движения для полевого оператора  $\Psi(\vec{r})$  можно записать, исходя из уравнения Гейзенберга

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\vec{r}) = [H, \Psi(\vec{r})], \quad (4.5)$$

что дает

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\vec{r}) = \left( -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + U_{ext}(\vec{r}) \right) \Psi(\vec{r}) + \int d\vec{r}' \Psi^+(\vec{r}') U(\vec{r} - \vec{r}') \Psi(\vec{r}') \Psi(\vec{r}). \quad (4.6)$$

Если теперь заменить операторы  $\Psi(\vec{r})$  их средними значениями  $\Phi(\vec{r}, t) = \langle \Psi(\vec{r}, t) \rangle$  (с учетом малых флуктуаций плотности конденсата), пренебрегая всеми корреляторами, то получится уравнение движения классического поля

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Phi(\vec{r}) = \left( -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + U_{ext}(\vec{r}) \right) \Phi(\vec{r}) + \int d\vec{r}' \Phi^*(\vec{r}') U(\vec{r} - \vec{r}') \Phi(\vec{r}') \Phi(\vec{r}). \quad (4.7)$$

В разреженном газе холодных атомов можно ограничиться только взаимодействиями, обусловленными столкновениями между атомами, положив

$$U(\vec{r} - \vec{r}') = c_0 \delta(\vec{r} - \vec{r}') = \frac{4\pi\hbar^2 a}{m} \delta(\vec{r} - \vec{r}'). \quad (4.8)$$

Параметр  $a$  называется длиной рассеяния  $s$ -волны;  $m$  – масса атома. Этот параметр зависит от деталей атомного потенциала и

может быть положительным или отрицательным. Напомним, что для  $^{23}\text{Na}$  найдено, что  $a = 2.75$  нм, для  $^{87}\text{Rb}$   $a = 5.77$  нм, для  $^7\text{Li}$   $a = -1.45$  нм.

В таком приближении локального взаимодействия между бозонами уравнение движения для волновой функции конденсата принимает вид

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Phi(\vec{r}) = \left( -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + U_{ext}(\vec{r}) \right) \Phi(\vec{r}) + c_0 |\Phi(\vec{r})|^2 \Phi(\vec{r}). \quad (4.9)$$

Это и есть уравнение Гросса – Питаевского [98, 99].

Уравнение Гросса – Питаевского может быть представлено в гамильтоновой форме

$$i\hbar \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{\delta E_{GP}}{\delta \Phi^*}, \quad (4.10)$$

где  $E_{GP}$  – функционал энергии Гросса – Питаевского,

$$E_{GP} = \int d\vec{r} \left( \frac{\hbar^2}{2m} |\nabla \Phi(\vec{r})|^2 + U_{ext}(\vec{r}) |\Phi(\vec{r})|^2 + \frac{c_0}{2} |\Phi(\vec{r})|^4 \right). \quad (4.11)$$

Потенциал  $U_{ext}(\vec{r})$ , удерживающий атомы конденсата, может быть весьма произвольным. Часто в качестве функции  $U_{ext}(\vec{r})$  берется параболический потенциал, как хорошее приближение реального потенциала ловушки. Действительно, вблизи минимума потенциальной ямы или около максимума потенциального барьера разложение  $U_{ext}(\vec{r})$  по степеням отклонения от точки экстремума во втором порядке дает параболическую зависимость от координат. Частными случаями его являются: сферически симметричный потенциал

$$U_{ext}(r) = \frac{m}{2} \omega_B^2 r^2; \quad (4.12)$$

несимметричные потенциалы, например для сигароподобной ловушки он имеет форму

$$U_{ext}(x, y, z) = \frac{m}{2} [\omega_{\perp}^2 (x^2 + y^2) + \omega_{\parallel}^2 z^2]. \quad (4.13)$$

Непараболический удерживающий потенциал соответствует случаю, когда два облака конденсата разделены потенциальным барьером конечной высоты и слабо связаны из-за туннелирования атомов сквозь барьер. Такой потенциал можно аппроксимировать следующим выражением:

$$U_{ext}(x, y, z) = \frac{m}{2} [\omega_{\perp}^2(x^2 + y^2) + \omega_{\parallel}^2 z^2 + \kappa(z^2 - b^2)^2]. \quad (4.14)$$

Другой пример непараболического потенциала ловушки – потенциал оптической решетки – будет рассмотрен позже.

#### 4.1.2. Бозе-эйнштейновская конденсация в квазиодномерной параболической ловушке. Одномерное уравнение Гросса – Питаевского

Предположим, что потенциал, удерживающий конденсат, описывается формулой (4.13). В этом случае уравнение Гросса – Питаевского записывается как

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Phi(\vec{r}) + \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \Phi(\vec{r}) - \frac{m}{2} [\omega_{\perp}^2(x^2 + y^2) + \omega_{\parallel}^2 z^2] \Phi(\vec{r}) - c_0 |\Phi(\vec{r})|^2 \Phi(\vec{r}) = 0. \quad (4.15)$$

Удобно ввести нормированные переменные и переписать это уравнение в безразмерной форме. Выберем в качестве нормированных переменных

$$\begin{aligned} \tau &= \omega_{\perp} t; \\ \eta &= x l_h; \\ \zeta &= y l_h; \\ \xi &= z L_h; \\ \Phi(x, y, z, t) &= N^{1/2} \phi(\eta, \zeta, \xi, \tau). \end{aligned} \quad (4.16)$$

В этих переменных уравнение Гросса – Питаевского выглядит так:

$$i \frac{\partial \phi}{\partial \tau} + \frac{1}{2} \Delta_{\perp} \phi + \frac{1}{2} \left( \frac{l_h}{L_h} \right)^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi^2} - \frac{1}{2} (r_{\perp}^2 + \lambda \xi^2) \phi - \frac{c_0 N}{\hbar \omega_{\perp}} |\phi|^2 \phi = 0, \quad (4.17)$$

где

$$\begin{aligned} l_h^2 &= \frac{\hbar}{m \omega_{\perp}}; \\ r_{\perp} &= (\eta^2 + \zeta^2)^{1/2}; \\ \lambda &= \left( \frac{\omega_{\parallel} l_h}{\omega_{\perp} L_h} \right)^2; \\ \Delta_{\perp} &= \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2}. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Длина  $l_h$  характеризует поперечный размер облака конденсата, который считается много меньшим продольного размера ловушки  $L_h$ . Если ввести корреляционный радиус (*healing length*)

$$\xi_c = \left( \frac{\hbar^2}{2mN|c_0|} \right)^{1/2} = (8\pi N|a|)^{-1/2}, \quad (4.19)$$

то константу нелинейности в (4.17) можно записать как

$$\frac{|c_0|N}{\hbar \omega_{\perp}} = \text{sign}(a) \frac{1}{2} \left( \frac{l_h}{\xi_c} \right)^2. \quad (4.20)$$

Если плотность атомов конденсата  $N_a$  определяется как интеграл от квадрата модуля волновой функции конденсата, то параметр  $N$  связан с плотностью атомов соотношением

$$N_a = \int |\Phi(\vec{r})| d^3 r = N \int |\phi(\vec{r})| d^3 r. \quad (4.21)$$

Выбрав нормировку функции  $|\phi(\vec{r})|$ , можно выразить  $N$  через плотность атомов конденсата.

Если поперечный размер ловушки велик по сравнению с продольным и взаимодействие между атомами слабое,  $l_h \ll \xi_c$ , то структура облака конденсата в поперечном направлении

определяется самой ловушкой, и распределение в поперечном направлении задается линейным уравнением

$$i \frac{\partial \phi}{\partial \tau} + \frac{1}{2} \Delta_{\perp} \phi - \frac{r_{\perp}^2}{2} \phi = 0. \quad (4.22)$$

Эта задача напоминает поиск поперечного распределения электромагнитного поля в волоконном световоде. Таким образом, надо найти поперечные моды (решения линейного уравнения) и разложить искомое решение уравнения Гросса – Питаевского (4.17) по этим модам, полагая, что коэффициенты разложения являются функциями времени и продольной координаты.

Пусть

$$\phi(\vec{r}, t) = \psi(\xi, t) \varphi(\eta, \zeta) e^{-i\mu\tau}. \quad (4.23)$$

Подстановка этого разложения в уравнение (4.17) дает

$$\left( i \frac{\partial \psi}{\partial \tau} + \frac{1}{2} \left( \frac{l_h}{L_h} \right)^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} - \frac{\lambda}{2} \xi^2 \psi - \frac{c_0 N}{\hbar \omega_{\perp}} |\varphi \psi|^2 \psi \right) \varphi + \frac{1}{2} (\Delta_{\perp} \varphi - r_{\perp}^2 \varphi + 2\mu\varphi) \psi = 0. \quad (4.24)$$

Положив

$$\Delta_{\perp} \varphi - r_{\perp}^2 \varphi + 2\mu\varphi = 0 \quad (4.25)$$

и используя краевые условия  $\varphi \rightarrow 0$  при  $r_{\perp} = (\eta^2 + \zeta^2)^{1/2} \rightarrow \infty$ , можно найти поперечные моды сигарообразной ловушки.

Простое приближение соответствует выбору основной моды, для которой

$$\varphi_0(r_{\perp}) = C e^{-\frac{\mu_0 r_{\perp}^2}{4}}. \quad (4.26)$$

Умножив (4.24) на  $\varphi_0(r_{\perp})$  и интегрируя по поперечным координатам, получим уравнение

$$i \frac{\partial \psi}{\partial \tau} + \frac{1}{2} \left( \frac{l_h}{\xi_c} \right)^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} - \frac{\lambda}{2} \xi^2 \psi - \frac{c_0 N A}{\hbar \omega_{\perp}} |\psi|^2 \psi = 0, \quad (4.27)$$

где

$$A = 2\pi \int_0^{\infty} \varphi_0^2(r_{\perp}) r_{\perp} dr_{\perp}. \quad (4.28)$$

Выбирая должным образом параметры  $N$ ,  $A$  и  $L_h$ , можно привести уравнение (4.27) к каноническому виду одномерного уравнения Гросса – Питаевского:

$$i \frac{\partial \psi}{\partial \tau} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} - \xi^2 \psi - \sigma |\psi|^2 \psi = 0. \quad (4.29)$$

Здесь

$$\sigma = \text{sign}(c_0) = \text{sign}(a_0). \quad (4.30)$$

Как исходное уравнение Гросса – Питаевского, так и его одномерная версия могут быть получены в форме уравнений Эйлера – Лагранжа вариационной задачи с лагранжианом

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{(3D)} &= \frac{i\hbar}{2} \left( \Phi^* \frac{\partial}{\partial t} \Phi - \Phi \frac{\partial}{\partial t} \Phi^* \right) + \frac{\hbar^2}{2m} |\nabla \Phi|^2 - \\ &\quad - U_{trap}(\vec{r}) |\Phi|^2 - \frac{c_0}{2} |\Phi|^4; \\ \mathcal{L}^{(1D)} &= \frac{i}{2} \left( \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial \tau} - \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial \tau} \right) + \left| \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \right|^2 - \xi^2 |\psi|^2 - \frac{\sigma}{2} |\psi|^4. \end{aligned} \quad (4.31)$$

Функционалы действия

$$S = \int \mathcal{L}^{(3D)}[\Phi] d\vec{r} dt \quad (4.32)$$

или

$$S = \int \mathcal{L}^{(1D)}[\psi] d\tau d\xi \quad (4.33)$$

инвариантны относительно сдвигов по оси времени и умножения полей на фазовый множитель. Но функционалы действия не инвариантны по отношению к трансляции вдоль осей координат из-за потенциала ловушки.

### 4.1.3. Одномерное нелинейное уравнение Шредингера

Предельный случай сильноанизотропной длинной сигарообразной ловушки может быть описан по аналогии с электромагнитными волнами в волоконных световодах, где профиль (необязательно параболический, но обычно цилиндрически симметричный) показателя преломления волокна играет роль удерживающего потенциала, тогда как в продольном направлении потенциальные стенки разнесены на огромное расстояние, и их влиянием можно пренебречь. Конденсат, сосредоточенный внутри такой вытянутой ловушки, может быть описан одномерным уравнением Гросса – Питаевского, где линейное по полю слагаемое отсутствует:

$$i \frac{\partial \psi}{\partial \tau} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} - \sigma |\psi|^2 \psi = 0. \quad (4.34)$$

Это известное одномерное нелинейное уравнение Шредингера, широко используемое в теории нелинейных волн в самых разнообразных областях физики. Опираясь на эту аналогию, можно ожидать существования квазиодномерных «волн вещества» в форме ярких солитонов, подобных временным солитонам в нелинейных оптических волокнах, если взаимодействие атомов притягивающее ( $a < 0$ ). И действительно, яркие солитоны в конденсате атомов  ${}^7\text{Li}$ , где взаимодействие атомов имеет характер притяжения, были независимо обнаружены в двух экспериментах [100, 101]. До этого в конденсатах с отталкивающим взаимодействием ( ${}^{87}\text{Rb}$ ,  ${}^{23}\text{Na}$ ) удалось сформировать темные солитоны [102, 103], которые выглядят как провал в однородном фоне концентрации атомов.

Солитонные решения нелинейного уравнения Шредингера образуют множество, характеризуемое набором непрерывных параметров  $\eta, V$ . Наиболее известным является фундаментальный солитон, имеющий следующий вид:

$$\psi(\tau, \xi) = \frac{\eta}{\sqrt{-\sigma}} \operatorname{sech}\left(\frac{\eta}{\sqrt{2}}(\xi - V\tau)\right) \times \exp\left[\frac{i}{2}\left(V\xi + \left(\eta^2 - \frac{V^2}{2}\right)\tau\right)\right]. \quad (4.35)$$

Это решение нелинейного уравнения Шредингера иногда называют *ярким* (или светлым) *солитоном* (рис. 4.1), подчеркивая тем самым то, что он располагается на нулевом фоне, т.е. исчезает при  $\tau, \xi \rightarrow \pm\infty$ .

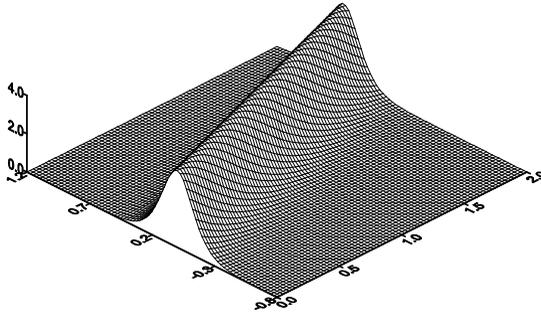


Рис. 4.1. Яркий солитон – решение нелинейного уравнения Шредингера (4.35) с параметрами  $\eta = 2\sqrt{2}$ ,  $V = 5$

Яркий солитон существует при  $c_0 < 0$  (параметр  $c_0$  определен в (4.8)). В случае отталкивания между атомами конденсата  $c_0 > 0$ , и нелинейное уравнение Шредингера не имеет солитонных решений на нулевом фоне. Если при  $\tau, \xi \rightarrow \pm\infty$  плотность конденсата  $|\psi(\xi, \tau)|^2$  конечная и постоянная, т.е. при  $t, z \rightarrow \pm\infty$   $|\psi(\xi, \tau)|^2 \rightarrow |\psi_0|^2$ , существует решение нелинейного уравнения Шредингера, называемое *темным солитоном* (рис. 4.2):

$$\psi(\tau, \xi) = \pm \frac{\eta}{\sqrt{-\sigma}} \tanh\left(\frac{\eta}{\sqrt{2}}(\xi - V\tau)\right) \times \exp\left[-\frac{i}{2}\left(V\xi - \left(2\eta\sqrt{\sigma} + \frac{V^2}{2}\right)\tau\right)\right]. \quad (4.36)$$

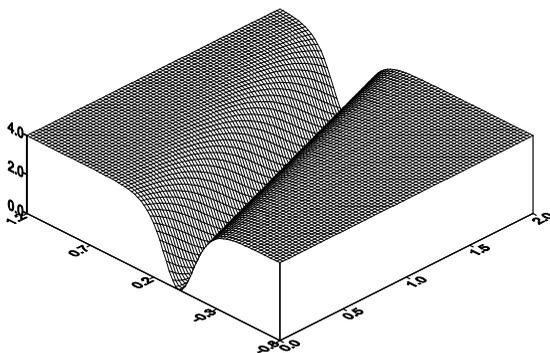


Рис. 4.2. Темный солитон – решение нелинейного уравнения Шредингера (4.36) с параметрами  $\eta = 2\sqrt{2}$ ,  $V = 5$

Темные солитоны, как и светлые, упруго взаимодействуют между собой и устойчивы (хотя и неасимптотически) по отношению к слабым возмущениям. Столкновение двух фундаментальных солитонов описывается двухсолитонным решением нелинейного уравнения Шредингера [103].

Следующим шагом в сторону реальной ситуации является учет удерживающего потенциала в продольном направлении. Вместо нелинейного уравнения Шредингера рассматривается одномерное уравнение Гросса – Питаевского для конденсата в параболической ловушке (4.29).

Нелинейного уравнения Шредингера недостаточно для описания неоднородных состояний бозе-эйнштейновского конденсата, где ловушка может играть важную роль, но как модель, позволяющая предсказать ожидаемые явления, данное уравнение может оказаться полезным.

## 4.2. Эксперименты с солитонами в бозе-эйнштейновском конденсате

Почти одновременно две различные группы исследователей (первая группа из Ecole Normale Supérieure в Париже [101], другая – из Университета Райса, Хьюстон, Техас, США [100]) наблюдали яркие солитоны в бозе-эйнштейновском конденсате (БЭК) паров  ${}^7\text{Li}$ , захваченных в магнитную ловушку. Атомы  ${}^7\text{Li}$  находились в состоянии  $|F = 1, m_F = 1\rangle$  (о классификации термов см. прил. 2). Солитоны создавались путем непрерывного изменения длины рассеяния  $a$  от положительного ее значения к отрицательному значению с помощью резонанса Фешбаха во внешнем магнитном поле [104].

В работе парижской группы [101] сферическое облако конденсата было адиабатически деформировано так, чтобы получить цилиндрическую (сигарообразную) форму облака конденсата, напоминающую горизонтально расположенный волновод:

$$U_{ext}(x, y, z) = \frac{m}{2} [\omega_{\perp}^2(x^2 + y^2) - \omega_{\parallel}^2 z^2]. \quad (4.37)$$

Здесь знак последнего слагаемого был изменен с помощью внешнего магнитного поля. Основным эффектом этого отталкивающего потенциала является то, что центр масс конденсата ускоряется вдоль продольной оси.

Сигарообразная форма конденсата в работе группы из Университета Райса формировалась с помощью лазерных лучей (рис. 4.3). Погасив пару поперечных лучей, можно позволить облаку конденсата двигаться и трансформироваться в солитон или солитоны, что зависит от числа частиц в конденсате.

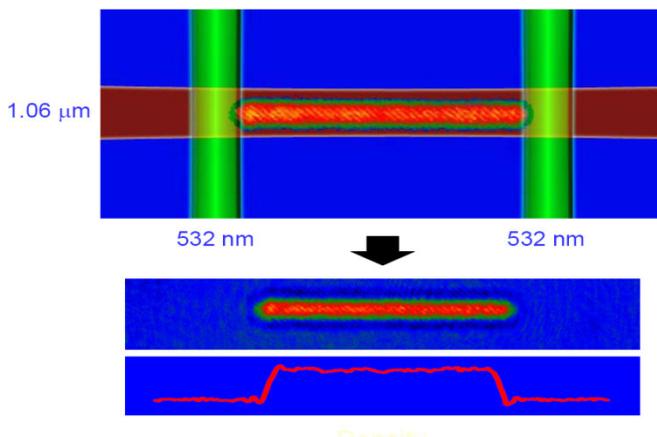


Рис. 4.3. Квазиодномерное облако бозе-эйнштейновского конденсата паров  ${}^7\text{Li}$  [105]

Движение облака конденсата в горизонтальном направлении имеет различный характер в зависимости от знака длины рассеяния  $a$ . На рис. 4.4 приведены распределения конденсата в продольном направлении, наблюдаемые в разные моменты времени. Здесь  $\omega_{\parallel}$  приблизительно равно 3 Гц, длина области в продольном направлении, где двигались атомы конденсата, равна 1.28 мм. На левой картинке (для потенциала отталкивания, т.е.  $a > 0$ ) видно, что облако расплывается, происходит его диффузия. Но если знак взаимодействия изменится, отталкивание сменяется притяжением (т.е. теперь  $a < 0$ ), и диффузия становится подавленной из-за нелинейных эффектов. На правой картинке рис. 4.4 видно, что облако конденсата расслоилось на несколько «комков» (каждый из которых является ярким солитоном), которые движутся в горизонтальном направлении.

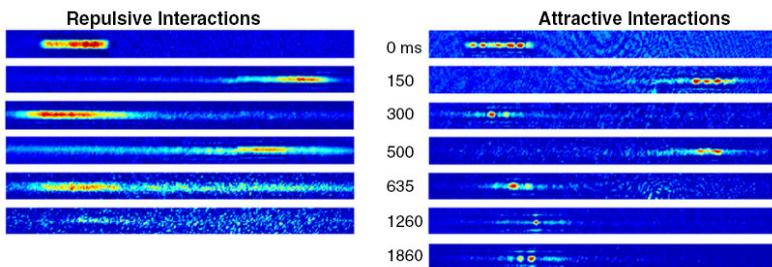


Рис. 4.4. Эволюция облака бозе-эйнштейновского конденсата паров  $^7\text{Li}$  [105]

Рис. 4.5 показывает более детально эволюцию солитонов, наблюдаемых в этих экспериментах. Кроме того, что вся группа солитонов движется как целое в магнитной ловушке, расстояния между солитонами меняется периодически. Этому отвечает отталкивающее взаимодействие между самими солитонами. Из-за потерь число солитонов постепенно меняется.

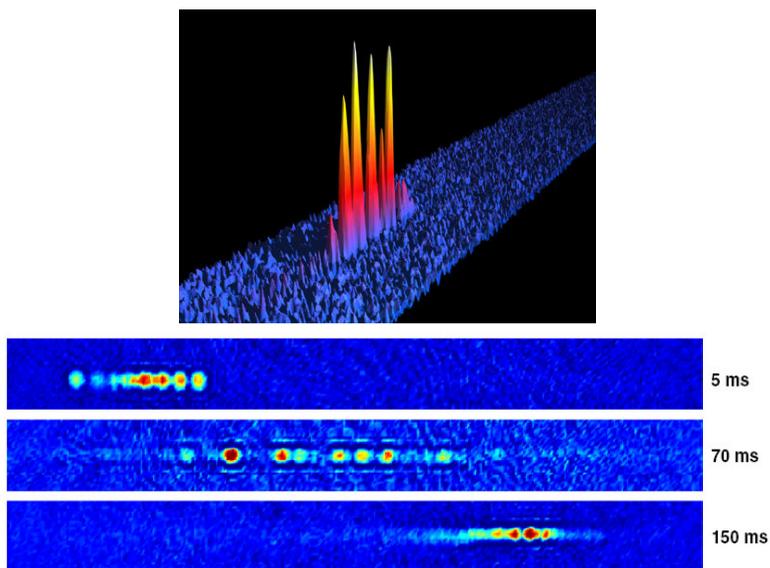


Рис. 4.5. Цепочка солитонов в бозе-эйнштейновском конденсате [105]

Темные солитоны в бозе-эйнштейновском конденсате наблюдались в работах [102, 103], в которых исследовался конденсат паров  $^{87}\text{Rb}$ . В этом случае потенциал межатомного взаимодействия отталкивающий. Чтобы генерировать темный солитон, необходимо в некотором месте пространственного распределения конденсата изменить фазу волновой функции  $\psi(\vec{r}, t)$  на  $\pi$ . Это локальное изменение фазы разовьется, как следует из опыта, полученного при изучении нелинейного уравнения Шредингера, в провал в распределении частиц конденсата, пропорционального  $|\psi(\vec{r}, t)|^2$  (рис. 4.6). Изменение фазы достигается облучением облака конденсата через маску так, чтобы половина частиц конденсата приобрели бы фазовый сдвиг.

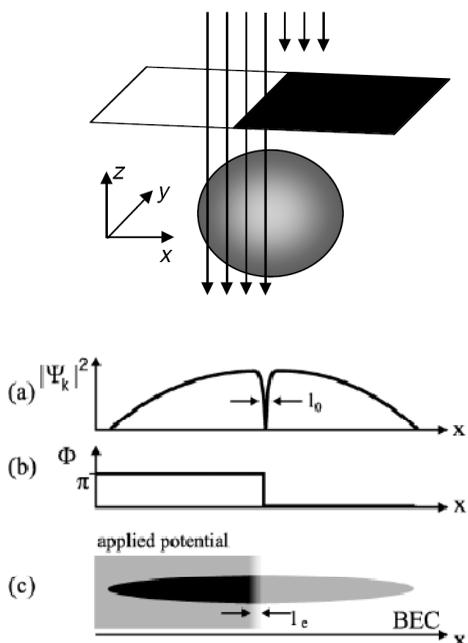


Рис. 4.6. Создание темного солитона в бозе-эйнштейновском конденсате (вверху) [102]. Распределение плотности (a) и фазы (b) темного солитона; схема рождения темных солитонов (c)

На рис. 4.7 показаны экспериментальные (верхняя часть рисунков, от *A* до *E*) и теоретические (нижняя часть рисунков, от *F* до *J*) распределения конденсата после описанного выше сдвига фазы в различные моменты времени. Разность фаз между верхней и нижней половинами облака конденсата составляла  $1.5\pi$ . Количество атомов в конденсате было  $(1.7 \pm 0.3) \times 10^6$ . Пространственный размер почти сферического облака равнялся 70 мкм. Видно достаточно хорошее согласие с рассчитанной картиной эволюции темного солитона.

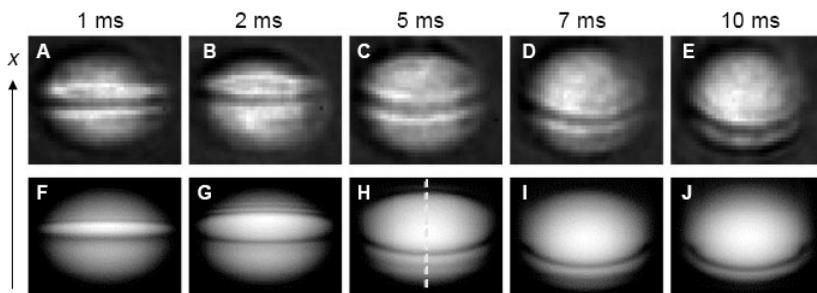


Рис. 4.7. Экспериментальные и теоретические распределения конденсата, иллюстрирующие движение темного солитона в бозе-эйнштейновском конденсате. Заимствовано из [103]

Следует отметить наблюдаемое в эксперименте разбегание темных солитонов.

В работах [102, 103] сообщалось о наблюдении набора светлых солитонов в конденсате атомов  $^{85}\text{Rb}$  после того, как исходный конденсат испытывал коллапс из-за относительно сильного притяжения между атомами. В этом эксперименте ловушка была почти одномерной, тогда как форма солитонов близка к трехмерной. Эволюция цепочки солитонов в этом эксперименте показана на рис. 4.8.

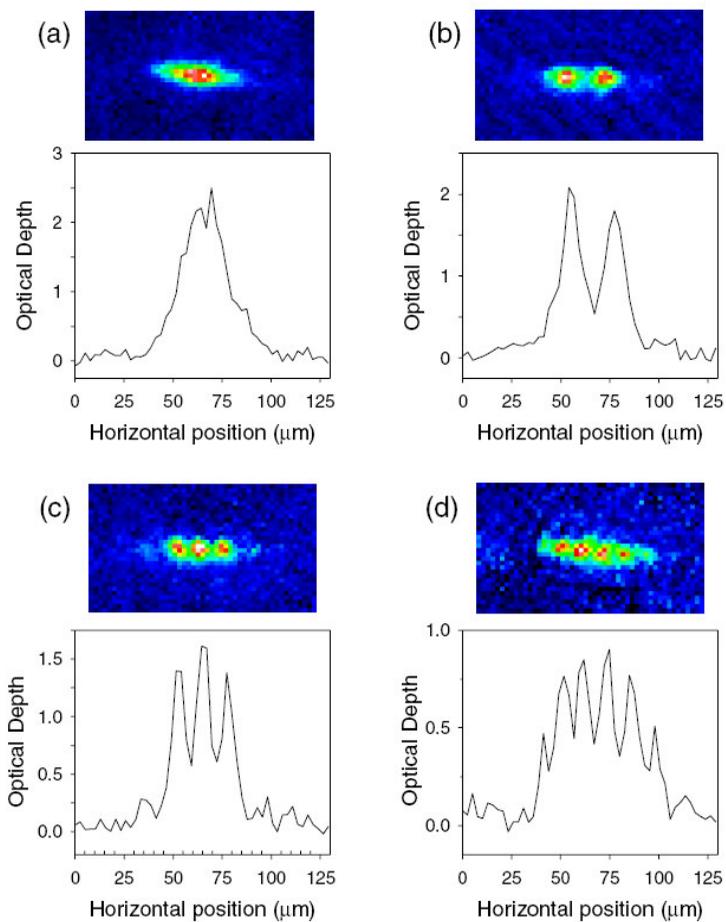


Рис. 4.8. Эволюция цепочки солитонов из [106]

### 4.3. Солитоны в бозе-конденсатах. Оптические решетки

#### 4.3.1. Охлажденные атомы в оптических решетках

Рассмотрим здесь подробно формирование оптической решетки в магнитооптической ловушке. Оптическая решетка – массив микроскопических потенциалов, индуцированных за счет высокочастотного эффекта Штарка (см. прил. 4) в интерферирующих лазерных пучках, который может быть использован для удержания охлажденных атомов (рис. 4.9).

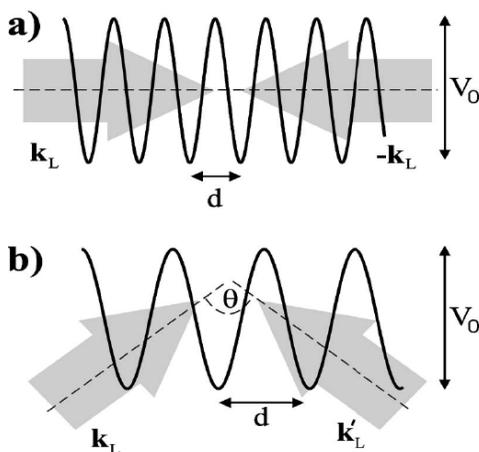


Рис. 4.9. Принцип образования периодического распределения напряженности электрического поля при интерференции двух лазерных лучей. Нижний рисунок показывает, как можно менять период этого распределения

Квантовое движение таких атомов описывается колебательным движением каждого атома в потенциальной яме и туннелированием в соседние ямы. Последнее явление приводит к формированию зонной структуры спектра коллектива атомов.

Если облако конденсата помещается в поле стоячей электромагнитной волны, атомы перераспределяются по узлам оптической решетки, и образуется нечто вроде кристаллической структуры, где в узлах кристалла расположены не атомы, а группы атомов бозе-конденсата.

Потенциал *одномерной решетки* описывается функцией (рис. 4.10)

$$U_{ext}(x, y, z) = \frac{m}{2} [\omega_{\perp}^2(x^2 + y^2) - \omega_{\parallel}^2 z^2] + g \cos^2 kz, \quad (4.38)$$

где  $k = 2\pi/\lambda$  – волновой вектор;  $\lambda$  – длина волны лазерного излучения. Такой потенциал отвечает решетке с периодом  $a = \lambda/2$ . Глубина оптического потенциала пропорциональна динамической атомной поляризуемости и интенсивности лазерного излучения.

Многомерным решеткам отвечают потенциалы следующего вида:

$$U_{ext}(x, y, z) = \frac{m}{2} [\omega_{\perp}^2(x^2 + y^2) - \omega_{\parallel}^2 z^2] + g_x \cos^2 \kappa_x x + g_y \cos^2 \kappa_y y + g_z \cos^2 \kappa_z z \quad (4.39)$$

для трехмерного случая и

$$U_{ext}(x, y, z) = \frac{m}{2} [\omega_{\perp}^2(x^2 + y^2) - \omega_{\parallel}^2 z^2] + g_x \cos^2 \kappa_x x + g_y \cos^2 \kappa_y y \quad (4.40)$$

для двумерного случая. Гармоническая модуляция выбрана здесь лишь как пример. В последнее время внимание привлекают сверхрешетки, в которых чередуются потенциальные ямы разной глубины и (или) ширины (рис. 4.10).

Обычно для описания движения бозонных атомов во внешнем удерживающем потенциале и в потенциале оптической ловушки используется следующий гамильтониан [107]:

$$H = \int d\vec{r} \Psi^+(\vec{r}) \left( -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + U_{ext}(\vec{r}) + U_T(\vec{r}) \right) \Psi(\vec{r}) + \frac{2\pi a \hbar^2}{m} \int d\vec{r} d\vec{r}' \Psi^+(\vec{r}) \Psi^+(\vec{r}') \Psi(\vec{r}') \Psi(\vec{r}), \quad (4.41)$$

где  $\Psi(\vec{r})$  является оператором бозонного поля для атомов в заданном внутреннем состоянии;  $U_T(\vec{r})$  – потенциал оптической решетки;  $U_{ext}(\vec{r})$  – дополнительный медленно меняющийся внешний удерживающий потенциал, т.е. потенциал магнитной ловушки.

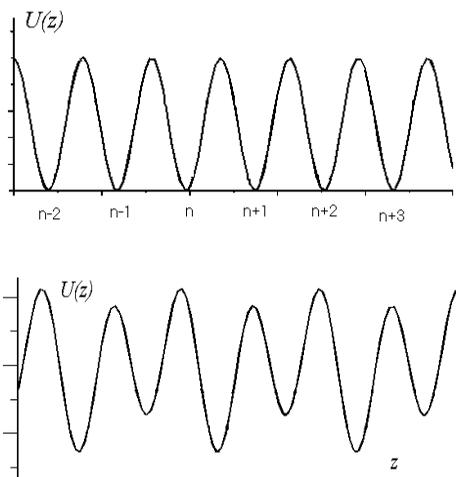


Рис. 4.10. Пример потенциала одномерной решетки (вверху) и одномерной сверхрешетки (внизу)

Теоретическое описание бозе-эйнштейновского конденсата в оптических решетках очень похоже на описание, которое используется в физике твердого тела. Выделяются два предельных случая: *приближение сильной связи*, когда атомы конденсата локализованы в узлах решетки и только изредка переходят в соседние узлы, и *приближение слабой связи*, которое отвечает почти свободному движению атомов.

В приближении сильной связи  $\Psi(\vec{r})$  представляется линейной суперпозицией операторов рождения бозонов в каждом узле оптической решетки. Гамильтониан (4.41) после ряда упрощений

сводится к гамильтониану взаимодействующих бозонов, напоминающему гамильтониан Хаббарда, описывающий систему электронов в приближении сильной связи (или узких зон).

В приближении слабой связи обычно решается само уравнение Гросса – Питаевского с дополнительным периодическим потенциалом, отвечающим оптической решетке. Большинство результатов в этом случае получено численными методами.

#### Приложение 4. Эффект Штарка

Уровни энергии атома изменяются при помещении атома во внешнее электрическое поле. Это явление называется *эффектом Штарка*.

Оператор возмущения записывается как  $H_{in} = -dE$ , где  $d$  – оператор дипольного момента атома. Если диагональные элементы оператора  $d$  равны нулю, то смещение уровней энергии может быть вычислено во втором порядке теории возмущений. Для уровня с энергией  $E_n$  смещение записывается как

$$\Delta E_n = -\frac{1}{2} \alpha_{jk}^{(n)} E_k E_j, \quad (\text{П4.1})$$

где  $E_k$  –  $k$ -я компонента напряженности электрического поля;  $\alpha_{jk}^{(n)}$  – поляризуемость атома во внешнем поле. Если электрическое поле высокочастотное, необходимо провести усреднение по периоду.

В пространственно неоднородном поле градиент  $\Delta E_n$  определяет силу в уравнении движения атома, и в зависимости от знака поляризуемости атом будет втягиваться или выталкиваться из области максимума напряженности электрического поля.

### 4.3.2. Бозонная модель Хаббарда в оптическом потенциале

Рассмотрим подробно, как формируется бозе-система, описываемая моделью Бозе – Хаббарда.

В случае сильной связи атом конденсата основное время проводит около атома в узле решетки и изредка совершает переход (за счет туннелирования или термоактивированного перескока) к атому в другом узле. Для отдельного узла собственное состояние электрона в кристалле характеризуется функцией Ваннье, которая локализована в индивидуальном узле решетки. Полевой оператор рождения электрона может быть разложен по базису из функций Ваннье, локализованных в узлах решетки. Аналогичные представления применимы для бозонов конденсата в оптической решетке, если глубина потенциальных ям решетки достаточно велика. Полевой оператор  $\Psi(\vec{r})$  можно в этом случае разложить по базису из функций Ваннье:

$$\Psi(\vec{r}) = \sum_j b_j w(\vec{r} - \vec{r}_j) \quad (4.42)$$

и учитывать только самые нижние колебательные состояния. Гамильтониан (4.41) можно представить как

$$H = -t \sum_{\langle i,j \rangle} b_i^+ b_j + \sum_j \varepsilon_j n_j + \frac{1}{2} U \sum_j n_j (n_j - 1), \quad (4.43)$$

где  $n_j = b_j^+ b_j$  – оператор числа частиц в узле оптической решетки с индексом  $j$ . Операторы  $b_j$  и  $b_j^+$  удовлетворяют каноническим коммутационным соотношениям

$$[b_j, b_k^+] = \delta_{kj}. \quad (4.44)$$

Параметр

$$U = \frac{2\pi a \hbar^2}{m} \int d^3x |w(\vec{r})|^4 \quad (4.45)$$

определяет силу отталкивания двух атомов в узле решетки. Туннелирование между соседними узлами ( $i$  и  $j$ ) определяется матричным элементом

$$t = \int d^3x w^*(\vec{r} - \vec{r}_j) \left[ -\frac{\hbar^2}{m} \nabla^2 + U_T(\vec{r}) \right] w(\vec{r} - \vec{r}_i). \quad (4.46)$$

Энергия атома в узле

$$\varepsilon_j = \int d^3x U_{ext}(\vec{r}) |w(\vec{r} - \vec{r}_j)|^2. \quad (4.47)$$

Обычно перекрытие функций Ванье для узлов, следующих за соседними узлами, мало. Это означает, что взаимодействие между атомами из соседних узлов является более слабым, чем учитываемое здесь взаимодействие атомов в одном узле. Поэтому переходы атомов в следующие за ближайшими соседями узлы решетки и эффект столкновений атомов из различных узлов не учитывается. В результате гамильтониан (4.43) – это гамильтониан уже упоминаемой в разд. 2.1 *бозонной модели Хаббарда* [108, 109].

Для оценки параметров гамильтониана бозонной модели Хаббарда в реальных условиях магнитооптической ловушки можно воспользоваться гармоническим приближением. Частота колебаний в гармоническом потенциале есть

$$\begin{aligned} \nu_j &= \sqrt{4E_R V_{j0}}; \\ E_R &= \frac{\hbar^2 k^2}{2m}. \end{aligned} \quad (4.48)$$

Здесь  $E_R$  – уже упоминаемая ранее однофотонная энергия отдачи (*recoil energy*). Частота колебаний  $\nu_j$  определяет расстояние между основным состоянием и энергией первой зоны блоховских возбуждений. Протяженность волновой функции основного состояния осциллятора есть

$$a_{j0} = \sqrt{\frac{\hbar}{m\nu_j}}, \quad (4.49)$$

фактически это длина рассеяния. Можно оценить величину параметра взаимодействия на узле:

$$U = \frac{2\pi\hbar\bar{v}}{\sqrt{2\pi}} \left( \frac{a}{\bar{a}_0} \right), \quad (4.50)$$

где черта над символом означает его геометрическое усреднение. Следовательно, модель справедлива, если выполняются неравенства  $a \ll a_{j0} \ll \lambda/2$ , следующие из условия псевдопотенциальности, и  $\Delta E_i = \frac{1}{2}Un_i(n_i - 1) \ll \hbar v_i$ , что означает большой интервал на шкале энергии между основным и первым возбужденным уровнем. Обычно эти неравенства выполняются.

Точные расчеты параметров гамильтониана, исходя из аналитического и численного решения уравнения Шредингера для частицы в потенциальной яме, выполнены, например, в работах [107, 110].

Значения оптического потенциала  $V_{j0}$ , энергии отдачи  $E_R$ , длины волны  $\lambda$  могут быть получены через амплитуду рассеяния  $a_0$  с нулевым спином и амплитуду рассеяния  $a_2$  со спином 1 для модели Бозе – Хаббарда:

$$\begin{aligned} \frac{U}{E_R} &= 5.97 \frac{a_0 + 2a_2}{\lambda/3} \zeta^{0.88}, \\ \frac{t}{E_R} &= 1.43 \zeta^{0.98} e^{-2.07\zeta^{0.5}}; \\ \zeta &= \frac{V_{j0}}{E_R}. \end{aligned} \quad (4.51)$$

Эти данные получены точным квантово-механическим расчетом одночастичной задачи в потенциальной яме, образованной перекрытием функций Ванье.

Как уже говорилось, бозонная модель Хаббарда описывает переходы бозонов между соседними узлами и взаимодействие бозонов, находящихся на одном узле. Эта модель предсказывает фазовый переход из сверхтекучей фазы в фазу моттовского изолятора при низкой температуре и с ростом отношения

параметра взаимодействия атомов на одном узле  $U$  (возникающего из-за отталкивания атомов) к параметру, учитывающему туннелирование атомов  $J$ . Для оптических решеток это отношение можно варьировать, меняя интенсивность лазерных лучей. С увеличением оптической глубины потенциальной ямы атомные волновые функции становятся все более и более локализованными, и взаимодействие на узле растет. В то же самое время матричный элемент туннельного перехода уменьшается. В фазе моттовского изолятора числа заполнения узлов фиксированы целыми значениями, соответствующими соразмерному заполнению узлов решетки. Таким образом, оптическая решетка представляет *кристаллическую структуру* с диагональным дальним порядком и периодом, определенным лазерными лучами. В спектре возбуждений моттовского изолятора существует конечная щель.

### 4.3.3. Уравнения движения в приближении сильной связи

Исходя из гамильтониана бозонной модели Хаббарда, можно найти уравнения движения для операторов бозонов в узлах решетки. Уравнение Гейзенберга имеет вид

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} A = [A, H]. \quad (4.52)$$

Учитывая коммутационные соотношения

$$\begin{aligned} [b_j, b_k^+] &= \delta_{kj}; \\ [b_j, n_k] &= \delta_{kj} b_j, \end{aligned} \quad (4.53)$$

можно для однокомпонентной бозонной модели Хаббарда (в которой рассматривается только один тип бозонов) получить:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} b_j = -J(b_{j+1} + b_{j-1}) + \varepsilon_j b_j + U n_j b_j. \quad (4.54)$$

В линейном пределе в случае, когда  $U = 0$ , и все энергии атома  $\varepsilon_j$  в узле одинаковы, можно положить  $b_j = B e^{-i\omega + iqa_j}$  и найти спектр коллективных возбуждений для одномерной решетки:

$$\omega(q) = \frac{\varepsilon}{\hbar} - 2 \frac{J}{\hbar} \cos(qa), \quad (4.55)$$

где  $a$  – постоянная решетки;  $q$  – волновое число. В случае двумерной (квадратной) или трехмерной (кубической) решетки спектр дается выражениями

$$\omega(q_x, q_y) = \frac{\varepsilon}{\hbar} - 2 \frac{J}{\hbar} (\cos(q_x a_x) + \cos(q_y a_y)); \quad (4.56)$$

$$\omega(q_x, q_y) = \frac{\varepsilon}{\hbar} - 2 \frac{J}{\hbar} (\cos(q_x a_x) + \cos(q_y a_y) + \cos(q_z a_z))$$

соответственно. Эти возбуждения образуют зону шириной  $4J/\hbar$ , как в модели сильной связи электронов в кристалле. Если учитывать более высокие колебательные состояния конденсатов в узлах решетки, то аналогичным путем получается многозонная структура спектра возбуждений.

В классическом пределе уравнение (4.54) совпадает с уравнением для многоканального направленного ответвителя или линейки оптических волноводов [111, 112]. В континуальном пределе эти уравнения переходят в нелинейное уравнение Шредингера:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi = -Ja^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi + (\varepsilon - 2J)\psi + U|\psi|^2\psi, \quad (4.57)$$

в котором  $\langle b_j \rangle \approx \langle b(x) \rangle = \psi(x)$ . Здесь  $a = \lambda/2$  – период решетки. Поскольку нелинейное уравнение Шредингера имеет солитонные решения, можно ожидать, что в одномерной оптической решетке могут распространяться возбуждения в форме ярких (при  $U < 0$ ) или темных (при  $U > 0$ ) солитонов или нелинейные периодические волны (известные как кноидальные волны и многозонные решения нелинейного уравнения Шредингера) [113]. При  $U > 0$  существует решение в виде однородного фона, однако известно, что это решение нелинейного уравнения

Шредингера модуляционно неустойчиво<sup>2</sup>. Малые возмущения на однородном фоне развиваются в цепочку темных солитонов.

Следует заметить, что в двумерном и трехмерном случаях однородного конденсата решений уравнение Гросса – Питаевского не имеет солитонных решений. Яркие солитоны, взятые в качестве начального условия, испытывают коллапс. В последнее время стало понятно, что периодическая модуляция параметров ловушки (например, создание 2D-оптической решетки, периодическая модуляция константы взаимодействия за счет эффекта Фешбаха) может остановить коллапс или в сильной степени замедлить его.

#### **4.3.4. Экспериментальное наблюдение солитонов в оптических решетках**

О наблюдении ярких солитонов в одномерной оптической решетке, содержащей бозе-эйнштейновский конденсат атомов  $^{87}\text{Rb}$ , сообщалось в статье [114]. Атомы этого конденсата испытывают отталкивание, и образование яркого солитона в однородном пространстве невозможно. Однако периодический потенциал оптической решетки способствует формированию светлого солитона.

---

<sup>2</sup> Модуляционная неустойчивость означает, что, начиная с некоторого значения амплитуды гармонической модуляции (оно зависит от волнового числа и параметров однородного решения), величина амплитуды начинает экспоненциально расти. Далее начинают играть роль нелинейные эффекты, останавливающие этот рост, и окончательно может возникнуть либо регулярная, либо хаотическая последовательность уединенных волн. В первом случае говорят о *солитонной решетке*.

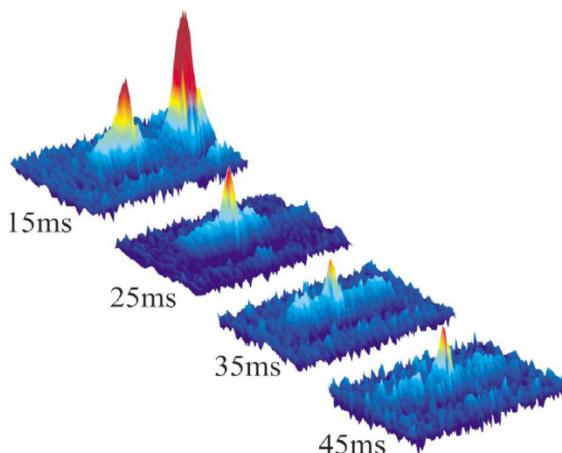


Рис. 4.11. Образование солитона в бозе-эйнштейновском конденсате.  
Из работы [114]

На рис. 4.11 показано, как из облака атомов  $^{87}\text{Rb}$  спустя 25 мс образуется небольшой пик в плотности конденсата, который почти не меняется ни по форме, ни по амплитуде за время наблюдения. Этот пик, который отождествлен с солитоном, просуществовал до 65 мс.

Подробно об эксперименте можно узнать в [114]. Важно заметить, что конечное время жизни светлого солитона в оптической решетке связано с реальной неоднородностью системы. Продольные колебания конденсата, хотя и медленно, но разрушают образовавшийся солитон.

#### 4.3.5. Численное моделирование. Одномерные оптические решетки

Теоретическое предсказание существования яркого солитона в одномерной оптической решетке было сделано в работах [115, 116]. В [115] численно решалось уравнение

$$i \frac{\partial \psi}{\partial \tau} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} - g \cos(\kappa \xi) \psi - \chi |\psi|^2 \psi = 0 \quad (4.58)$$

с начальным условием

$$\psi(\xi, \tau = 0) = 0.5 \sin \xi. \quad (4.59)$$

На основе результатов численного моделирования было найдено два типа солитоноподобных распределений бозонов (рис. 4.12). На обоих изображениях показано поле потенциала решетки

$$V(\xi) = g \cos \kappa \xi. \quad (4.60)$$

В представленном здесь случае  $g = 1.0$  и  $\kappa = 2.0$ . На рис. 4.12, *a* изображен солитон огибающей, накрывающий несколько узлов оптической решетки, образовавшийся через 400 единиц безразмерного времени  $\tau$ . Константа взаимодействия  $\chi = 0.2$  отвечает слабому взаимодействию. Результат расчета, отвечающий сильному взаимодействию  $\chi = 1.0$ , показан на рис. 4.12, *b*. В этом случае бозоны собираются в узкие (примерно на одном узле) распределения, которые образуются спустя 70 единиц безразмерного времени.

Следует заметить, что 1D-линейное уравнение Шредингера с периодическим потенциалом  $V(\xi) = g \cos \kappa \xi$  дает спектр с чередующимися разрешенными и запрещенными зонами. Разрешенные зоны (зоны Блоха) соответствуют линейным волнам, отвечающим пространственно квазипериодическим решениям уравнения Шредингера. Кубическая нелинейность, отвечающая отталкивающему взаимодействию, может привести к формированию солитона в виде волнового пакета с частотами, лежащими в запрещенных зонах. По этой причине они называются *щелевыми солитонами*. Невозможность излучить гармонические волны из этого волнового пакета обуславливает его устойчивость

или долгоживучесть. Такие щелевые солитоны простираются на много элементарных ячеек потенциала оптической решетки (в этом смысле они слабо локализованные), и амплитуда соответствующей волновой функции  $|\psi(\xi, \tau)|$ , осциллируя в пространстве, стремится к нулю при  $|\xi| \rightarrow \infty$ . На рис. 4.11 показана эволюция щелевого солитона, наблюдаемая экспериментально [114].

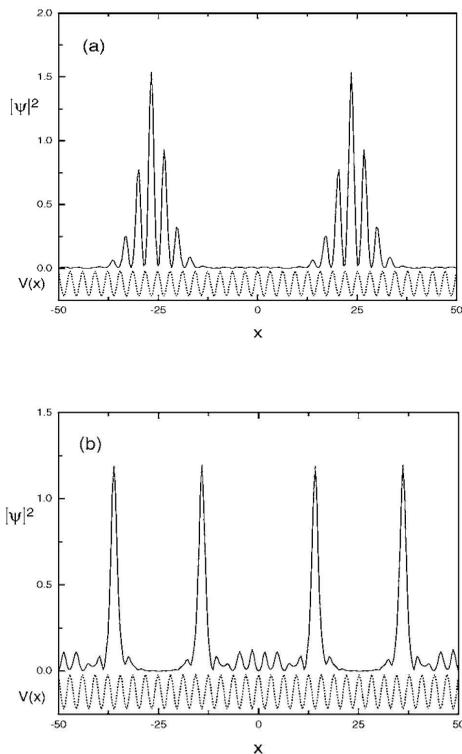


Рис. 4.12. Результаты численного моделирования одномерного щелевого солитона [115]

Исследованию одномерных оптических решеток посвящено очень большое число публикаций, обзор которых можно найти в [117].

### 4.3.6. Численное моделирование. Двумерные оптические решетки

2D-оптическая решетка создается в результате перекрытия двух лазерных лучей с образованием стоячих волн вдоль осей  $X$  и  $Y$ . Эта картина стоячих волн накладывается на облако бозе-эйнштейновского конденсата, находящееся в магнитной ловушке. Конденсат фрагментируется на отдельные облака, которые удерживаются в системе двумерных трубок, локализованных в узлах оптической решетки, ориентированных вдоль оси  $Z$ , рис. 4.13.

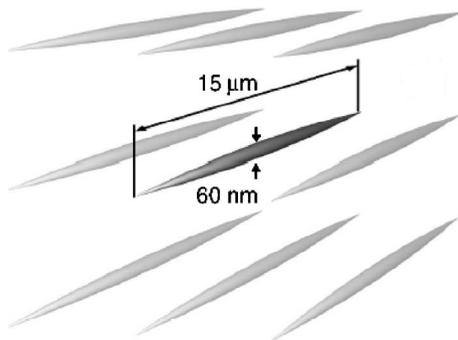


Рис. 4.13. Бозе-эйнштейновский конденсат, образующий двумерную оптическую решетку. Здесь указаны примерные размеры облака конденсата, захваченного в узле решетки (из [117])

Авторами работы [115] было проведено численное моделирование образования щелевых солитонов в 2D-оптической решетке путем решения уравнения

$$i \frac{\partial \psi}{\partial \tau} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - g \cos(\kappa x) \psi - g \cos(\kappa y) \psi - \chi |\psi|^2 \psi = 0. \quad (4.61)$$

Основной результат состоит в том, что однородный гармонический фон

$\psi(x, y, \tau = 0) = 1.0 \sin x \cos y + 0.01 \sin(0.28x) \cos(0.28y)$ , (4.62)
 не сохраняется во времени. В результате модуляционной неустойчивости возникает регулярная решетка солитонов, которые, однако, не являются устойчивыми и постепенно (за достаточно большое время) разрушаются. Расчеты выполнены для случая сильного взаимодействия  $\chi = 1.0$ .

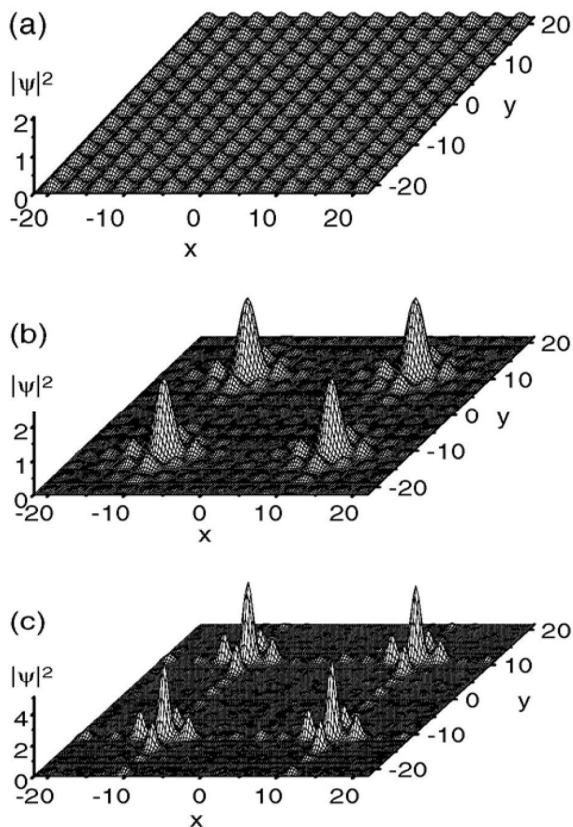


Рис. 4.14. Эволюция распределения атомов конденсата в двумерной оптической решетке из первоначального распределения (4.62) (a). Распределение атомов конденсата через  $\tau = 85$  единиц нормированного времени (b) и через  $\tau = 200$  (c)

Для случая, показанного на рис. 4.14, решетка щелевых солитонов сохранялась очень долго, до  $\tau = 1000$ . Было замечено, что увеличение константы взаимодействия  $\chi$  продлевает время жизни этой картины распределения атомов конденсата. Это связано с тем, что большая величина потенциального барьера между узлами оптической решетки подавляет туннелирование атомов на соседние узлы. Видимо, это динамическое проявление образования фазы моттовского изолятора.

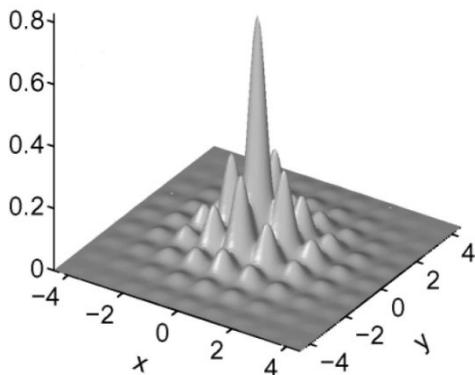
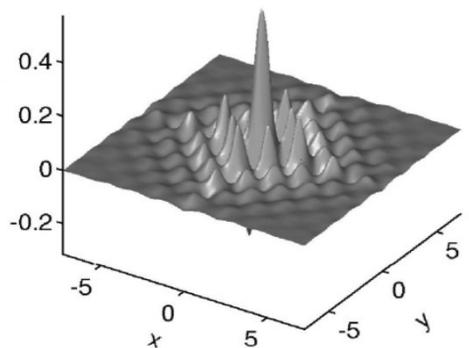


Рис. 4.15. Амплитуда двумерного щелевого солитона в нелинейной керровской среде при константе взаимодействия  $g = 10.8$  (вверху) и  $g = 18.15$  (внизу)

Следует отметить статью [118], в которой рассматривались солитоны в двумерной оптической решетке, но для фоторефрактивных сред. Формально одно из уравнений, которое использовалось авторами этой работы,

$$i \frac{\partial \psi}{\partial \tau} + \frac{1}{2} \nabla_{\perp}^2 \psi - g[\sin^2(\pi x) + \sin^2(\pi y)]\psi - \sigma |\psi|^2 \psi = 0, \quad (4.63)$$

совпадает с уравнением Гросса – Питаевского в периодическом потенциале (4.61). На рис. 4.15 показаны амплитуды щелевого солитона  $|\psi(x, y, \tau)|$  для случая керровской (кубической) нелинейности.

Надо заметить, что в этой статье рассматривался случай сильного взаимодействия, когда следовало ожидать, что бозе-эйнштейновский конденсат находится в фазе моттовского изолятора.

## Список литературы

1. Капица П.Л. // ДАН СССР. 1937. Т. 18, С. 28; Nature. 1937. V. 141, P. 74.
2. Ландау Л.Д. // ЖЭТФ. 1941. Т. 11. С. 592.
3. Шмидт В.В. Введение в физику сверхпроводников. М.: Наука, 1982. 238 с.
4. Де Жен П. Сверхпроводимость металлов и сплавов. М.: Мир, 1968.
5. Кашурников В.А., Красавин А.В. Современные проблемы физики твердого тела. Часть 2. Высокотемпературная сверхпроводимость. М.: МИФИ, 2002. 180 с.
6. Osheroff D.D., Richardson R.C., and Lee D.M. // Phys. Rev. Lett. 1972. V.29. P. 920.
7. Кашурников В.А., Красавин А.В. Современные проблемы физики твердого тела. Часть 2. Высокотемпературная сверхпроводимость. М.: МИФИ, 2002. 180 с.
8. Bleaney B., Simon F. // Trans. Farad. Soc. 1939. V. 35. P. 1205.
9. Reppy J.D., Depatie D. // Phys. Rev. Lett. 1964. V. 12. P. 187.
10. Keesom W.H., MacWood G.E. // Physica. 1938. V. 5. P. 737.
11. Allen J.F., Jones H. // Nature. 1938. V. 141. P. 243.
12. Андроникашвили Э.Л. // ЖЭТФ. 1946. Т. 16. С. 780.
13. Теория сверхпроводимости. Сборник статей под ред. Боголюбова Н.Н. М.: ИЛ, 1960.
14. Боголюбов Н.Н. // ЖЭТФ. 1958. Т. 34. С. 58 (1958).
15. Henshaw D.T.G., Woods A.D.B. // Phys. Rev. 1961. V. 121. P. 1266.
16. Тилли Д.Р., Тилли Дж. Сверхтекучесть и сверхпроводимость. М: Мир, 1977. 304 с.
17. Vinen W.F. // Proc. Roy. Soc. 1961. V. 260. P. 218.
18. Osborne D.V. // Proc. Phys. Soc. 1950. V. 63. P. 909.
19. Андроникашвили Э.Л., Каверкин И.П. // ЖЭТФ. 1955. Т. 28. С. 126.
20. Фейнман Р. Статистическая механика. М.: Мир, 1975. 402с.
21. Hess G.B., Fairbank W.M. // Phys. Rev. Lett. 1967. V. 19. P. 216.
22. Packard R.E., Sanders T.M. // Phys. Rev. Lett. 1969. V. 22. P. 823.
23. Roberts J.L. et al. // Phys. Rev. Lett. 2001. V. 86. P. 4211.
24. Duine R.A. and Stoof H.T.C. // Phys. Rev. Lett. 2001. V. 86. P. 2204.
25. Hasimoto H. // J. Fluid Mech. 1972. V. 51. P. 477.
26. Kartsev P.F. // Phys. Rev. A. 2003. V. 68. P. 063613.
27. Halperin W.P., Archie C.N., Rasmussen F.B., Burhman R.A., Richardson R.C. // Phys. Rev. Lett. 1974. V. 32. P. 927.
28. Померанчук И. // ЖЭТФ. 1950. Т. 30. С. 919.
29. Нуфриев Ю.Д. // Письма в ЖЭТФ. 1965. Т. 1. С. 155.
30. Ли Д.М. // УФН. 1997. Т. 167. № 12. С. 1307.
31. Osheroff D.D., Richardson R.C., and Lee D.M. // Phys. Rev. Lett. 1972. V. 28. P. 885.
32. Emery V.J., Sessler A.M. // Phys. Rev. 1960. V. 119. P. 43.

33. Anderson P.W., Morel P. // Phys. Rev. 1961. V. 123. P. 1911.
34. Balian R., Werthamer N.R. // Phys. Rev. 1963. V. 131. P. 1553.
35. Leggett A.J. // Rev. Mod. Phys. 1975. V. 47. P. 331.
36. Alvesaro T.A., Anufriev Yu. D. et.al. // Phys. Rev. Lett. 1973. V. 30. P. 962.
37. Yanof A., Reppy J.D. // Phys. Rev. Lett. 1974. V. 33. P. 631.
38. Korruccini L.R., Osheroff D.D. // Phys. Rev. Lett. 1980. V. 45. P. 2029.
39. Ричардсон Р.К. // УФН. 1997. Т. 167. № 12. С. 1340.
40. Ошеров Д.Д. // УФН. 1997. Т. 167. № 12. С. 1327.
41. Mermin N.D., Ho T.L. // Phys. Rev. Lett. 1976. V. 36. P. 594.
42. Berthold J.E. et.al. // Phys. Rev. Lett. 1976. V. 37. P. 1138.
43. Lawson D.T., Bozler H.M., Lee D.M. // Phys. Rev. Lett. 1975. V. 34. P. 121.
44. Roach P.R. et.al. // Phys. Rev. 1975. Lett. V. 34. P. 715.
45. Gianetta R.W., Ahonen A., Polturak E at al. // Phys. Rev. Lett. 1980. V. 45. P. 262.
46. Borovik-Romanov A.S. et.al. // Phys. Rev. Lett. 1989. V. 62. P. 1631.
47. Porto J., Parpia J.M. // Phys. Rev. Lett. 1995. V. 74. P. 4667.
48. Дмитриев В.В. и др. // Письма в ЖЭТФ. 2002. Т. 76. С. 371; 2004. Т. 79. С. 612.
49. Ганьшин А.Н. и др. // Письма в ЖЭТФ. 2001. Т. 73. С. 329; В.Н.Григорьев и др. // ФНТ. 2003. Т. 29. С. 1165.
50. Каган М.Ю. // УФН. 1994. Т. 164. С. 77.
51. Bardeen J., Baym G., Pines D. // Phys. Rev. 1967. V. 156. P. 156.
52. Van de Haar P.G., Frossati G., Bedel K.S. // J. of Low. Temp. Phys. 1989. V. 77. P. 35.
53. Горьков Л.П., Мелик-Бархударов Т.К. // ЖЭТФ. 1961. Т. 40. С. 1452.
54. Андреев А.Ф. // ЖЭТФ. 1966. Т. 50. С. 1415.
55. Lekner J. // Phil. Mag. 1970. V. 22. P. 669; Saam W.F. // Phys. Rev. A. 1971. V. 4. P. 1278.
56. Orr B.G. et.al. // Phys. Rev. Lett. 1986. V. 56. P. 378.
57. Kim D., Nakagawa M., Ishikawa O., and Kogama T. // Phys. Rev. Lett. 1981. V. 71. P. 1581.
58. Pierce M.E. and Manousakis E. // Phys. Rev. Lett. 1999. V. 83. P. 5314.
59. Gordillo M.C., Boronat J., and Casulleras J. // Phys. Rev. B. 2000. V. 61. P. R878.
60. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Том V. Статистическая физика. Часть 1. М.: Физматлит, 2001. 616 с.
61. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Том IX. Статистическая физика. Часть 2. М.: Физматлит, 2004. 496 с.
62. Изюмов Ю.А., Скрыбин Ю.М. Статистическая механика магнитоупорядоченных систем. М.: Наука, 1987. 264 с.
63. Fisher M.P.A., Weichman P.B., Grinstein G., and Fisher D.S. // Phys. Rev. B. 1989. V.40. P. 546.
64. Kashurnikov V.A. and Svistunov B.V. // Phys. Rev. A. 1996. V. 53. P. 11776.
65. Кашурников В.А., Подливаев А.И., Свистунов Б.В. // Письма в ЖЭТФ. 1994. Т. 61. С. 375.

66. Giamarchi T. and Schulz H.J. // Phys. Rev. B. 1988. V. 37. P. 325.
67. Kosterlitz J.M. and Thouless D.J. // J. Phys. C. 1973. V. 6. P. 1181; Kosterlitz J.M. // J. Phys. C. 1974. V. 7. P. 1046.
68. Кашурников В.А., Красавин А.В., Свистунов Б.В. // Письма в ЖЭТФ. 1996. Т. 64. С. 92.
69. Klitzing K. V., Dorda G., and Pepper M. // Phys. Rev. Lett. 1980. V. 45. P. 494.
70. Sprik R. And Walraven J.T.M. // Phys. Rev. Lett. 1983. V. 51. P. 479.
71. Safonov A.I., Vasilyev S.A., Yasnikov I.V., Lukashovich I.I., and Jaakkola S. // Phys. Rev. Lett. 1998. V. 81. P. 4545.
72. Anderson M.H., Ensher J.R., Matthews M.R., Wieman C.E., Cornell E.A. // Science. 1997. V. 269. P. 198.
73. Davis K.B., Mewes M.O., Andrews M.R., van Druten N.J., Durfee D.S., Kurn D.M., Ketterle W. // Phys. Rev. Lett. V. 75. P. 3969.
74. Bradley C.C., Sackett C.A., Tollett J.J., Hulet R.G. // Phys. Rev. Lett. 1995. V. 75. P. 1687.
75. Greiner M. Ultracold quantum gases in three-dimensional lattice potentials. // [http://greiner.physics.harvard.edu/PDF%20Files/PhD\\_greiner.pdf](http://greiner.physics.harvard.edu/PDF%20Files/PhD_greiner.pdf)
76. Кадомцев Б.Б., Кадомцев М.Б. // УФН. 1997. Т. 167. № 6. С. 649.
77. Кеттерле В. // УФН. 2003. Т. 173. №12. С. 1339.
78. Ensher J.R. et.al. // Phys. Rev. Lett. 1996. V. 77. P. 4984.
79. Jin D.S. et.al. // Phys. Rev. Lett. 1996. V. 77. P. 420.
80. Mewes M.O. et.al. // Phys. Rev. Lett. 1996. V. 77. P. 988.
81. Bradley C.C. et.al. // Phys. Rev. Lett. 1997. V. 78. P. 985.
82. Kagan Yu., Shlyapnikov G.V., Walraven J.M. // Phys. Rev. Lett. 1996. V. 76. P. 2670.
83. Ерошенко Ю.Н. // УФН. 1997. Т. 167. № 6. С. 688.
84. Корнелл Э.А., Виман К.Э. // УФН. 2003. Т. 173. №12. С. 1320.
85. Leli B.G. // Physics Today. 1997. V. 50. P. 17.
86. Mewes M.O. et.al. // Phys. Rev. Lett. 1997. V. 78. P. 582.
87. Andrews M.R. et.al. // Science. 1997. V. 275. P. 637.
88. Kashurnikov V.A., Krasavin A.V., and Svistunov B.V. // Phys. Rev. B. 1998. V. 58. P. 1826.
89. Каган Ю., Вартаньянц И.А., Шляпников Г.В. // ЖЭТФ. 1981. Т. 81. С. 1113.
90. Greiner M., Mandel O., Esslinger T., Hansch T.W., and Bloch I. // Nature (London). 2002. V. 415. P. 39.
91. Gerbier F.et.al. // Phys. Rev. Lett. 2005. V. 95. 050404.
92. Gerbier F., Widera A., Fölling S., Mandel O., Gericke T., and Bloch I. // Phys. Rev. A. 2005. V. 72. 053606.
93. Kashurnikov V.A., Prokof'ev N.V., and Svistunov B.V. // Phys. Rev. A. 2002. V. 66. 031601.
94. Müller T., Fölling S., Widera A., and Bloch I. // Phys. Rev. Lett. 2007. V. 99. 200405.
95. Fölling S., Widera A., Müller T., Gerbier F., and Bloch I. // Phys. Rev. Lett. 2006. V. 97. 060403.

96. Dalfovo F., Giorgini S., Pitaevskii L.P., Stringari S. // *Rev. Mod. Phys.* 1999. V. 71. № 3. P. 463.
97. Питаевский Л.П. // *УФН.* 1998. Т. 168. № 6. С. 641.
98. Питаевский Л.П. // *ЖЭТФ.* 1961. Т. 40. С. 646.
99. Gross E. P. // *Nuovo Cimento.* 1961. V. 20. P. 454; *J. Math. Phys.* 1963. V. 4. № 2. P. 195.
100. Strecker K. E., Partridge G. B., Truscott A. G., Hulet F. G. // *Nature.* 2002. V. 417. P. 150.
101. Khaykovich L., Schreck F., Ferrari G., Bourdel T., Cubizolles J., Carr L. D., Castin Y., Salomon C. // *Science.* 2002. V. 296. P. 1290.
102. Burger S., Bongs K., Dettmer S., Ertmer W., Sengstock K., Sanpera A., Shlyapnikov G. V. // *Phys. Rev. Lett.* 1999. V. 83. P. 5198.
103. Denschlag J., Simsarian J.E., Fede D.L., Clark C.W., Collins L.A., Cubizolles J., Deng L., Hagley E.W., Helmerson K., Reinhardt W.P., Rolston S.L., Schneider B.I., and Phillips W.D. // *Science.* 2000. V. 287. P. 97.
104. Milstein J.N., Menotti C. and Holland M.J.// *New Journal of Physics.* 2003. V. 5. P. 52.1.
105. Strecker K.E., Partridge G.B., Truscott A.G., Hulet R.G. // *Nature.* 2002. V. 417. P. 150.
106. Cornish S. L., Thompson S.T., Wieman C. F. // *Phys. Rev. Lett.* 2006. V.96. P. 170401.
107. Jaksch D., Bruder C., Cirac J.I., Gardiner C.W., and Zoller P. // *Phys. Rev. Lett.* 1998. V. 81. P. 3108.
108. Fisher M.P.A., Weichman P.B., Grinstein G., and Fisher D.S. // *Phys. Rev. B.* 1989. V.40. P. 546.
109. Jaksch D., and Zoller P. // *Ann. Phys.* 2005. V. 315. P. 52.
110. van Oosten D., van der Straten P., and Stoof H.T.C. // *Phys. Rev. A.* 2001. V. 63. 053601.
111. Aceves A.B., Luther G.G., DeAngelis C., Rubenchik A.M., Turitsyn S.K. // *Phys. Rev. Lett.* 1995. V. 79. P. 73.
112. Aceves A.B., De Angelis C., Peschel T., Muschall R., Lederer F., Trillo S. and Wabnitz S. // *Phys. Rev. E.* 1996. V. 53. P. 1172.
113. Ахмедиев Н.Н., Анкевич А. Солитоны. Нелинейные импульсы и пучки. М.: Физматлит, 2003. 304 с.
114. Eiermann B., Anker Th., Albiez M., Taglieber M., Treutlein P., Marzlin K.-P., and Oberthaler M.K., // *Phys. Rev. Lett.* 2004. V. 92. 230401.
115. Baizakov B.B., Konotop V.V., Salerno M. // *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.* 2002. V. 35. P. 5105.
116. Ostrovskaya E.A. and Kivshar Yu.S. // *Phys. Rev. Lett.* 2003. V. 90. P. 160407.
117. Morsch O., Oberthaler M. // *Rev. Mod. Phys.* 2006. V. 78. P. 179.
118. Efremidis N.K., Hudock J., Christodoulides D.N., Fleischer J.W., Cohen O., and Segev M. // *Phys. Rev. Lett.* 2003. V. 91. 213906.

Владимир Анатольевич Кашурников  
Андрей Валерьевич Красавин  
Андрей Иванович Маймистов  
Петр Федорович Карцев

## Сверхтекучесть и бозе-конденсация

Учебное пособие

Редактор М.В. Макарова

Подписано в печать 17.12.2008. Формат 60x84 1/16  
Уч.-изд. л. 10,5. Печ. л. 10,5. Тираж 150 экз.  
Изд. № 1/32 Заказ №

Московский инженерно-физический институт  
(государственный университет).  
115409, Москва, Каширское ш., 31

Типография издательства «Тривант»  
г. Троицк Московской области