

В.А. Кашурников А.И. Маймистов

**СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ
ФИЗИКИ ТВЕРДОГО ТЕЛА**

Часть 1

**Целый и дробный квантовые
эффекты Холла**

Москва 2011

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ЯДЕРНЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ «МИФИ»

В.А. Кашурников А.И. Маймистов

**СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ
ФИЗИКИ ТВЕРДОГО ТЕЛА**

Часть 1

Целый и дробный квантовые эффекты Холла

Издание второе, дополненное

Москва 2011

ББК 22.31я7
УДК 530.152.1(075) + 538.9(075) + 537.621.2(075)
К 31

К а ш у р н и к о в В.А., М а й м и с т о в А.И. Современные проблемы физики твердого тела. Ч.1. Целый и дробный квантовые эффекты Холла. Учебное пособие. Изд. 2-е, доп. М.: НИЯУ МИФИ, 2011. – 64с.

Настоящее учебное пособие написано на основе одноименного курса лекций, предлагаемого студентам МИФИ на кафедре “Физика твердого тела” до 2008 года, а ныне читаемого в НИЯУ МИФИ на новообразованной кафедре “Физика твердого тела и наносистем”.

Представлен краткий обзор экспериментов и теории целого и дробно-квантового эффектов Холла, рассмотрены основные результаты исследований по высокотемпературным сверхпроводникам, обсуждаются основные модели, претендующие на описание механизма притяжения носителей заряда в ВТСП. Рассматриваются основные физические явления, сопровождающие сверхтекучие фазовые переходы в гелии-3 и гелии-4, различие фазовых переходов в трехмерном случае и в низкоразмерных сильнокоррелированных системах, таких как сверхтекучий гелий в одномерных каналах, спиновые цепочки и лестницы и т.д., бозе-конденсация в щелочных металлах. Пособие включает историю открытия явлений, библиографические ссылки, достаточно детальное изложение отдельных теоретических представлений, по выборочным темам предлагаются подробно разобранные задачи.

Пособие предназначено для студентов, обучающихся по специальности “физика конденсированного состояния”, и может также представлять интерес для преподавателей, ведущих подобные курсы.

Рецензент канд. физ.-мат. наук Ивлиев С.В.

Рекомендовано к изданию редсоветом НИЯУ МИФИ
в качестве учебного пособия

© В.А. Кашурников, А.И. Маймистов, 2011
© Национальный исследовательский ядерный университет МИФИ, 2011

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	4
Введение	6
1. Обычный эффект Холла. Применение. Случай сильного и слабого поля. Понятие магнитной длины. Двумерный электронный газ	8
Задачи	14
2. Целый квантовый эффект Холла. История открытия. Теоретическое объяснение. Квантование уровней в магнитном поле (уровни Ландау)	16
Задачи	24
3. Дробный квантовый эффект Холла. История открытия и современное состояние эксперимента. Система уровней в первой зоне Ландау. Лафлиновская жидкость как новое состояние двумерного электронного газа. Возбуждения с дробным зарядом	29
Задачи	42
4. Вигнеровская кристаллизация. Фазовые переходы “кристалл Вигнера – жидкость Лафлина”. Численное моделирование	48
Задачи	58
Список литературы	62

ПРЕДИСЛОВИЕ

Физика твердого тела, в частности, и физика конденсированного состояния в целом, как в фундаментальном смысле, так и в экспериментальных приложениях в последние двадцать – тридцать лет переживает период бурного развития. Достаточно вспомнить открытие в 1980 г. целого, а в 1982-м – дробного эффекта Холла, получение в 1986 г. первых высокотемпературных сверхпроводников, наблюдение в 1995 г. бозе-эйнштейновской конденсации в газовой фазе в щелочных металлах, бурный расцвет исследований мезоскопических явлений и т.п. Подчеркнем, что практически все эти вехи в развитии фундаментальной физики для первооткрывателей отмечены Нобелевскими премиями. В смысле технологии и прикладных исследований можно упомянуть достижения твердотельной микроэлектроники, позволившей сделать существенный прорыв в компьютерных технологиях, оптоволоконной и лазерной технике, реализованные в новейших телекоммуникационных системах, наблюдаемый в последние годы взлет исследований по наноструктурам. Заметим, что возможности уже таковы, что в лабораториях “готовят” кластерные системы из нескольких десятков атомов с заданными свойствами – наномангниты, спиновые цепочки, квантовые точки и т.д. Отметим также, что существенный рост мощности компьютеров, в свою очередь, стимулировал развитие нового направления – численных кластерных методов, позволяющих решать точно различные задачи теории ограниченных систем с сильным взаимодействием. Зачастую это позволяет прямо моделировать полученные экспериментально кластеры.

Перечисленные примеры затрагивают лишь некоторые далеко не полные аспекты развития физики конденсированного состояния, наиболее близкие авторам.

В то же время последовательного изложения этих новых исследований пока нет. Имеются оригинальные статьи, неплохие обзоры, но учебные пособия и учебники на достаточно приемлемом широкой аудитории уровне авторам не известны.

Представляемое учебное пособие ориентировано, прежде всего, на достаточно квалифицированного читателя, знакомого с материалами, излагаемыми в курсах квантовой механики, статистиче-

ской физики, физики твердого тела, основ сверхпроводимости и физики фазовых переходов. Цель пособия – ознакомление с современными взглядами на актуальные проблемы физики твердого тела, интенсивно развиваемые в последнее время, на вопросы современной теории и эксперимента, на наиболее яркие научные достижения физики конденсированного состояния.

Авторы ни в коей мере не претендуют на полноту изложения огромного по объему материала, поэтому в основном придерживаются повествования в форме обзора, только отдельные моменты рассмотрены подробнее. Для более углубленного и последовательного изучения предлагаются задачи, решение которых позволяет описать некоторые рассматриваемые проблемы из «первых принципов».

Авторы искренне надеются, что данное пособие будет полезно достаточно широкому кругу научных работников и студентов старших курсов, интерес которых лежит в области физики конденсированного состояния вещества.

ВВЕДЕНИЕ

В 1879 г. американский физик Эдвин Герберт Холл (E.H.Hall) наблюдал появление поперечной электродвижущей силы (ЭДС) в проводнике с током, находящемся во внешнем магнитном поле. Величина ЭДС Холла оказалась пропорциональна напряженности магнитного поля и зависела только от концентрации носителей заряда в проводнике. Эффект Холла оказался чуть ли не единственным экспериментальным методом, позволяющим определять с высокой точностью концентрацию носителей и знак их заряда. Теория обычного эффекта Холла достаточно разработана и обобщена на случай зонной структуры твердого тела, и вплоть до 1980 г. казалось, что никаких открытий в этой области физики твердого тела не предвидится. Однако к восьмидесятым годам двадцатого столетия была разработана технология получения сложных плоских полупроводниковых сверхструктур с поперечными размерами порядка сотен и даже десятков ангстрем. На основе таких структур (обычно чередующиеся слои чистого полупроводника GaAs и с примесью алюминия – AlGaAs) изготавливают полевые транзисторы (наиболее употребительна для этих структур аббревиатура – MOSFET – metal - oxide - semiconductor - field - effect - transistor). В результате оказалось возможным реализовать чисто двумерные физические структуры (т.е. двумерный электронный газ). Измеряя ЭДС Холла и магнитосопротивление в поперечном магнитном поле в этих структурах, фон Клитцинг с соавторами (K. von Klitzing, G. Dorda, M. Pepper) в 1980 году обнаружил, что в сильных полях (~5-10 Тл) холловская проводимость квантуется и кратна отношению фундаментальных физических констант $e^2 / 2\pi\hbar$, где e – заряд электрона, \hbar – постоянная Планка. Этот эффект был назван *целым квантовым эффектом Холла* (часто используется аббревиатура: IQHE – Integer Quantum Hall Effect), и в 1985 году ученым-первооткрывателям была присуждена Нобелевская премия. В 1981 г. Лафлину (R.B. Laughlin) в рамках теории квантования уровней электрона в магнитном поле удалось объяснить этот эффект. Вслед за этим прорывом последовал следующий – буквально через два года, в 1982 г., Д.С. Тсуи, Х.Л. Штермер и А.С. Госсард (D.C. Tsui, H.L. Stormer, A.C. Gossard), при низких температурах ($T = 5$

К) и сильных полях ($H \sim 10$ Тл) наблюдали ступеньки холловской проводимости уже при значениях $[e^2 / 2\pi\hbar] / 3$. В дальнейшем наблюдалась целая серия ступенек $\mu e^2 / 2\pi\hbar$, где $\mu = 1/3, 1/5, 1/7, 2/9 \dots$. Этот эффект назвали *дробным квантовым эффектом Холла* (FQHE – Fractional Quantum Hall Effect). Его также удалось объяснить (1983 г., Лафлин), при этом оказалось, что двумерный электронный газ в сильном магнитном поле в этом случае переходит в новое основное состояние – несжимаемую квантовую жидкость (жидкость Лафлина). В 1998 г. теоретика Лафлина и экспериментаторам Тсуи и Штермеру была присуждена Нобелевская премия за открытие и объяснение FQHE. Теория и эксперимент дробного квантового эффекта Холла сейчас находится в непрерывном развитии, и за последние годы получены новые яркие результаты.

Заметим, что в настоящее время целый и дробный эффекты Холла наблюдают в двумерных инверсионных слоях МДП-структур *n*- и *p*-типа (например, на основе кремния), в гетеропереходах (сверхрешетках) на основе GaAs, InP, InAs, GaSb и др., а также в 2008-2009 гг. в графене. При этом в последнем случае наблюдают особенности квантования, характерные для безмассовых частиц, что связано, в свою очередь, со спектральными особенностями носителей заряда в графене.

1. Обычный эффект Холла. Применение. Случай сильного и слабого поля. Понятие магнитной длины. Двумерный электронный газ

Перед тем, как обсуждать вопросы квантового эффекта Холла, рассмотрим стандартную схему обычного эксперимента Э. Холла. Через плоскую прямоугольную пластину пропускается транспортный ток с объемной плотностью J в присутствии поперечного магнитного поля напряженности H (рис. 1.1). Электроны проводимости массой m , согласно простейшей модели Друде (1900 г.), разгоняются приложенным электрическим полем E , отклоняются силой Лоренца во внешнем магнитном поле и рассеиваются (например, на примесях) с характерным временем между столкновениями τ (для упрощения пока не зависящим от энергии электрона).

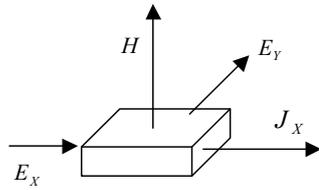


Рис. 1.1.
Геометрия стандартного эксперимента Холла

Итоговое уравнение движения электрона должно содержать все эти взаимодействия, и изменение импульса электрона в единицу времени будет подчиняться следующему соотношению:

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = e\mathbf{E} - \frac{\mathbf{P}}{\tau} + \frac{e}{cm} \mathbf{P} \times \mathbf{H}. \quad (1.1)$$

В равновесии изменение импульса во времени равно нулю: $d\mathbf{P}/dt = 0$. Учитывая связь плотности тока, скорости и импульса $\mathbf{J} = en\mathbf{V} = (e/m)n\mathbf{P}$, где n – плотность электронов, расписываем соотношение (1.1) по компонентам x, y . Тогда находим для тензора магнитосопротивления $\rho_{\alpha\beta}$ в плоскости x, y :

$$E_\alpha = \rho_{\alpha\beta} J_\beta, \quad \alpha, \beta = x, y;$$

$$\hat{\rho} = \begin{pmatrix} 1/\sigma_0 & -\omega_c \tau / \sigma_0 \\ \omega_c \tau / \sigma_0 & 1/\sigma_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho_0 & -R_H H \\ R_H H & \rho_0 \end{pmatrix}. \quad (1.2)$$

Здесь $\sigma_0 = 1/\rho_0 = e^2 n \tau / m$ – известное соотношение Друде для удельной проводимости, $\omega_c = eH / mc$ – ларморова (или циклотронная) частота, частота прецессии электрона в магнитном поле. Ток направлен под так называемым углом Холла ϕ к оси x , причем, $\tan \phi = \omega_c \tau$.

На эксперименте измеряют две физические величины:

- 1) магнитосопротивление $\rho_{XX} = 1/\sigma_0 = E_x/J_x|_{j_y=0}$ – сопротивление в направлении протекания тока в отсутствие поперечного тока. Как видно, оно в данном случае не зависит от магнитного поля и равно обычному друдевскому сопротивлению;
- 2) коэффициент Холла $R_H = E_y/J_x H|_{j_y=0} = 1/nec$ – отношение поперечной электродвижущей силы E_y (ЭДС Холла) к x -компоненте тока и магнитному полю. Как видно, в данном простейшем подходе эта величина не зависит от магнитного поля, и является функцией только концентрации носителей n . Кроме того, знак носителей заряда (т.е. знак величины e) также будет определять знак коэффициента Холла, так что, например, для дырочных носителей $R_H > 0$.

Интересно отметить, что сам Э. Холл (в экспериментах 1879 г.) стремился выяснить, действует ли сила, испытываемая проводником с током в магнитном поле, на весь проводник или же только на электрический ток (сам электрон как элементарная частица был обнаружен Томпсоном только через 8 лет в 1887 г.). Он рассуждал так: “если электрический ток в закрепленном проводнике сам притягивается к магниту, то этот ток должен подходить ближе к одной из сторон проводника и поэтому испытываемое им сопротивление должно нарастать”. Однако он ничего подобного не обнаружил, зато зафиксировал поперечную разность потенциалов. Как следует из нашего описания, причина появления поперечной ЭДС – действие силы Лоренца, заставляющей электроны отклоняться в сторо-

ну, перпендикулярную к направлению их движения. В результате возникает поле Холла, уравнивающее силу Лоренца, и между боковыми гранями образца возникнет разность потенциалов, которую и измеряют.

На эксперименте коэффициент Холла получают из измерения зависимости сопротивления Холла ρ_{XY} от магнитного поля, при этом ищут линейный участок на этой зависимости в диапазоне сильных магнитных полей (что, как правило, имеет место даже для реальных сложных композитных соединений):

$$\rho_{XY} = E_Y / J_X \Big|_{J_Y=0} = H / nec . \quad (1.3)$$

Из выражения для тензора магнитосопротивления (1.2) можно видеть, что сильное магнитное поле для системы электронов – это такое поле, в котором выполняется условие $\omega_c \tau \gg 1$ (соответственно, угол Холла ϕ стремится к $\pi/2$). Физически это означает, что период прецессии электрона много меньше среднего времени между столкновениями, и на его движение вдоль линий магнитного потока рассеяние влияет слабо. Напротив, условие $\omega_c \tau \ll 1$ (угол Холла ϕ стремится к нулю) является условием слабого поля, когда электрон постоянно сбивается с орбиты вокруг линий магнитного потока из-за столкновений с примесями и практически не чувствует магнитного поля. Обычно масштабы сильных магнитных полей в твердых телах порядка 1-10 Тл. При поле около 1 Тл ларморова частота $\omega_c \sim 10^{11}$ с. Типичное время рассеяния на примесях τ порядка 10^{-12} - 10^{-14} с. Таким образом, даже в больших полях ($> \sim 1$ Тл) реализуется режим “слабого поля” в смысле ранее сказанного: $\omega_c \tau \ll 1$. Однако это не мешает наблюдать эффект Холла, поскольку все равно можно с высокой точностью измерять поперечную ЭДС Холла, выражающую меру отклонения электронов проводимости в поперечном магнитному полю направлении.

В реальном твердом теле электрон проводимости не является свободной частицей, и его масса в общем случае отлична от массы свободного электрона. По определению тензор эффективных масс $m_{\alpha\beta}$ для электрона с энергией $E(\mathbf{k})$ имеет вид $m_{\alpha\beta}^{-1} =$

$= \hbar^{-2} d^2 E(\mathbf{k})/dk_\alpha dk_\beta$, $\alpha, \beta = x, y, z$. Однако в квазиклассическом приближении при условии медленности изменения внешних полей и отсутствии электрического и магнитного пробоя сохраняется соотношение (1.1) (только уже не для реального импульса, а для квазиимпульса \mathbf{k} блоховского электрона – электрона в зонной схеме – эти соотношения можно доказать (задача в конце параграфа). Обобщение тензора магнитосопротивления на случай зонного электрона уже не так тривиально. Так, рассмотрим следующую модельную задачу. Пусть имеется двухзонная система, т.е. электроны в каждой системе характеризуются своим тензором магнитосопротивления:

$$\hat{\rho}_i = \begin{pmatrix} \rho_i & -R_i H \\ R_i H & \rho_i \end{pmatrix}; \quad i = 1, 2. \quad (1.4)$$

Согласно соотношениям $1/\rho_i = e_i^2 n_i \tau / m_i$ и $R_i = 1/n_i e_i c$ мы тем самым задаем концентрацию, заряд и эффективную массу носителей заряда отдельно по зонам (положим для простоты время рассеяния одинаковым для обеих зон). Получим матрицу магнитосопротивления системы, суммируя токи по зонам (подробнее см. задачи в конце параграфа). В итоге в пределе сильного и слабого полей находим:

$$\begin{aligned} H \rightarrow 0 \quad (\omega_c \tau \ll 1): \\ \text{а) } \rho = \rho_1 \rho_2 / (\rho_1 + \rho_2); \\ R_H = (R_1 \rho_2^2 + R_2 \rho_1^2) / (\rho_1 + \rho_2)^2. \end{aligned} \quad (1.5)$$

$$\begin{aligned} H \rightarrow \infty \quad (\omega_c \tau \gg 1): \\ \text{б) } \rho = (\rho_1 R_2^2 + \rho_2 R_1^2) / (R_1 + R_2); \\ R_H = R_1 R_2 / (R_1 + R_2). \end{aligned} \quad (1.6)$$

Во втором случае, в сильных полях, можно преобразовать постоянную Холла:

$$R_H = R_1 R_2 / (R_1 + R_2) = 1 / (1/R_1 + 1/R_2) = 1 / (n_1 e_1 c + n_2 e_2 c). \quad (1.7)$$

Так, если мы имеем собственный полупроводник и учитываются только две зоны (зона проводимости и валентная зона), то $R_H = 1 / |e| c (n_h - n_e)$. Таким образом, в достаточно сильных полях, когда зоны дают аддитивный вклад в проводимость, можно измерять суммарную концентрацию носителей заряда, несмотря на сложную энергетическую структуру. Другими словами, необходимо, чтобы в сильных полях вклад различных зон расцеплялся. В этом случае выражение для коэффициента Холла остается таким же универсальным, позволяя получать информацию о суммарной концентрации носителей и знаке заряда. Кроме того, линейная зависимость поперечной компоненты ρ_{xy} (холловского сопротивления) от магнитного поля в широком интервале температур и полей для многих однозонных веществ позволяет конструировать датчики Холла – измерители магнитного поля, обладающие высокой чувствительностью и малыми размерами. Как видно из анализа, само условие “сильного поля” соответствует случаю аддитивного вклада каждой зоны в холловский ток и пренебрежимо малой интерференции их между собой. Как правило, перенормировка времени рассеяния и эффективной массы (а она здесь – циклотронная, в которую дает вклад только часть тензора эффективной массы, поперечная магнитному полю – m_{xx} , m_{xy} , m_{yx} и m_{yy}) приводит к тому, что режим “сильного” поля вполне достижим для реальных полей ~ 1 Тл, в реальных твердых телах.

Заметим, что более сложные подходы к описанию эффекта Холла учитывают энергетическую зависимость времени релаксации, что также приводит к полевой зависимости магнитосопротивления и ЭДС Холла даже в однозонном случае.

В заключение краткого описания обычного (традиционного) эффекта Холла отметим, что поперечный размер образца, в котором наблюдается эта холловская ЭДС, не критичен для эффекта, лишь бы распределение тока по сечению было однородным. Если же мы хотим реализовать истинно двумерную геометрию эксперимента (см. рис.1.1), следует применять фольги и пленки с таким поперечным размером, чтобы он был порядка и меньше характер-

ного радиуса вращения электрона r_H в магнитном поле (ларморова радиуса). Можно оценить, что при поле $H \sim 1-10$ Тл имеем $r_H = V_F/\omega_c \sim 10^3 - 10^4$ см ($V_F = (3\pi^2 n)^{1/3} \hbar/m \sim 10^8$ см/с – скорость Ферми, характерная скорость электронов). Такой поперечный размер образца вполне достижим. Однако при более сильных полях такая полуклассическая оценка становится неправильной. Более строгое квантово-механическое описание дает другой параметр для области локализации электрона в магнитном поле – l_H (называемого магнитной длиной), т. е., волновая функция электрона в поперечном магнитном поле направлении убывает как $\exp(-r^2/2l_H^2)$, где l_H определяется следующим выражением:

$$l_H = \sqrt{\hbar c/eH}, \quad (1.8)$$

что для поля $H \sim 5 \div 10$ Тл приводит к $l_H \sim 100$ ангстрем. Структуры с поперечным профилем такого масштаба (*наноструктуры*) удастся сделать на базе гетероструктур GaAs - Al_{1-x}Ga_xAs, представляющих собой систему плоских квантовых ям. Такие структуры изготавливают послойным напылением на подложку полупроводника GaAs, чередуя его со слоями того же полупроводника, допированного алюминием. Трехвалентный Al, замещающий трехвалентный Ga, не меняет концентрацию электронов, участвующих в проводимости, однако имеет несколько иной ионный радиус и силу связи с As, и приводит к другому химическому потенциалу и дну зоны проводимости для электронов. В результате допированные алюминием области становятся энергетическими барьерами для электронного газа, и он располагается между ними в плоских областях чистого GaAs с поперечным размером порядка сотни ангстрем. Таким образом, реализуется двумерный электронный газ. Однако отсюда еще не следует, что для электронного газа отсутствует поперечная составляющая импульса p_z , и электроны двумерны в физическом смысле. Для этого необходимо "включить" сильное магнитное поле, что и приводит, как покажем далее, к истинной двумерной ситуации.

Доказательство того факта, что магнитная длина и есть искомым характерный масштаб в *продольном по полю* направлении, выведем

из следующих соображений. Как известно, в поперечном магнитном поле движение электрона проводимости финитно, вследствие чего происходит дополнительное квантование его энергии, приводящее к так называемым уровням Ландау. Энергия электрона как функция продольного импульса и номера уровня Ландау имеет вид

$$E_j(k_Z) = \hbar^2 k_Z^2 / 2m + (j + 1/2)\hbar\omega_c, \quad j = 0, 1, 2, \dots$$

В геометрии периодического трехмерного “ящика” $L_X \times L_Y \times d$ продольный импульс также в свою очередь квантуется: $k_Z = (2\pi/d)n$, где $n = 0, 1, 2, \dots$. Если поперечный размер структуры d мал, то расстояние между уровнями энергии с различным импульсом k_Z (так называемыми уровнями размерного квантования) велико. Для истинного двумерного состояния системы необходимо, чтобы все другие характерные энергии были много меньше, чем расстояние между уровнями размерного квантования, тогда фактически всегда будет реализован нулевой поперечный импульс. Математически следует записать условие: $\hbar^2 k_Z^2 / 2m \gg \hbar\omega_c$, откуда немедленно следует искомое соотношение: $d \ll l_H$. Таким образом, если выбирается квантовая яма с таким поперечным размером, то электронный газ в ней будет всегда находиться на нулевом уровне поперечного размерного квантования, т.е. физически будет реализована двумерная ситуация.

Задачи

Задача 1.1. Доказать, что для квазиимпульса блоховского электрона во внешнем электрическом поле справедливо уравнения движения: $\hbar d\mathbf{k}_n / dt = e\mathbf{E}$.

Решение: Важно отметить, что в квазиклассическом приближении уравнение движения электрона с квазиимпульсом \mathbf{k}_n имеет почти такой же вид, как и в теории Друде, только без столкновительного члена:

$$\hbar \frac{d\mathbf{k}_n}{dt} = e\mathbf{E},$$

где n – номер зоны, $\mathbf{v}_n = \hbar^{-1} \partial \varepsilon_n(k) / \partial \mathbf{k}$ – групповая скорость. Для обоснования первой части этого соотношения исходим из того, что должна быть постоянна во времени энергия электрона: $\varepsilon_n(k) + e\varphi[\mathbf{r}(t)] = \text{const}(t)$. Варьируя ее, получим:

$$\partial \varepsilon_n(k) / \partial \mathbf{k} \times \partial \mathbf{k} / \partial t + e \nabla \varphi \times \partial \mathbf{r} / \partial t = 0.$$

Подстановка определений $\partial \mathbf{r} / \partial t = \mathbf{v}_n(k)$, $\mathbf{E} = -\nabla \varphi$ в полученное выражение, приводит к искомому соотношению для квазиимпульса блоховского электрона.

Задача 1.2 (повышенной трудности). Доказать, что для квазиимпульса блоховского электрона во внешнем магнитном поле справедливо уравнение движения:

$$\hbar d\mathbf{k}_n / dt = c^{-1} \mathbf{v}_n \times \mathbf{H}.$$

Указание: использовать постоянство энергии во времени как функцию полного импульса в магнитном поле $\mathbf{P} = \mathbf{p} - (e/c)\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$.

Задача 1.3. Имеется двухзонная система, т.е. электроны в каждой системе характеризуются своим тензором магнитосопротивления. Найти общий тензор магнитосопротивления.

Ответ и указание: если исходно имели для каждой зоны матрицу магнитосопротивления

$$\hat{\rho}_i = \begin{pmatrix} \rho_i & -R_i H \\ R_i H & \rho_i \end{pmatrix}; \quad i = 1, 2,$$

то складываем суммарный ток (и матрицы проводимости):

$$j_\alpha = (\sigma_{\alpha\beta}^1 + \sigma_{\alpha\beta}^2) E_\beta, \quad \alpha, \beta = x, y; \quad \hat{\sigma}_i^{-1} = \hat{\rho}_i.$$

Обращая матрицы, получаем итоговую матрицу магнитосопротивления:

$$\hat{\sigma}^{-1} = \hat{\rho} ; \hat{\sigma} = \hat{\sigma}_1 + \hat{\sigma}_2; \hat{\rho} = \begin{pmatrix} \rho & -R_H H \\ R_H H & \rho \end{pmatrix} ;$$

где

$$\rho = [\rho_1 \rho_2 (\rho_1 + \rho_2) + (\rho_1 R_2^2 + \rho_2 R_1^2) H^2] / A ;$$

$$R_H = [R_1 \rho_2^2 + R_2 \rho_1^2 + R_1 R_2 (R_1 + R_2) H^2] / A ;$$

$$A = (\rho_1 + \rho_2)^2 + (R_1 + R_2)^2 H^2 .$$

Задача 1.4. Исследовать полученные в предыдущей задаче выражения при малых и больших H . Сделать вывод о возможности измерения концентрации носителей тока по постоянной Холла.

Ответ: Заметим, что условие $\omega_c \tau \ll 1$ ($\omega_c \tau \gg 1$) (условие слабого и сильного поля) соответствует в наших обозначениях условию:

$$\rho_i / R_i H \ll 1 \quad (\rho_i / R_i H \gg 1) ,$$

а) $H \rightarrow 0$ ($\omega_c \tau \ll 1$):

$$\rho = \rho_1 \rho_2 / (\rho_1 + \rho_2) ;$$

$$R_H = (R_1 \rho_2^2 + R_2 \rho_1^2) / (\rho_1 + \rho_2)^2 ;$$

б) $H \rightarrow \infty$ ($\omega_c \tau \gg 1$):

$$\rho = (\rho_1 R_2^2 + \rho_2 R_1^2) / (R_1 + R_2) ; \quad R_H = R_1 R_2 / (R_1 + R_2) .$$

2. Целый квантовый эффект Холла. История открытия. Теоретическое объяснение. Квантование уровней в магнитном поле (уровни Ландау)

В 1980 г. немецкий физик Клаус фон Клитцинг с сотрудниками обнаружили, что в сильных полях (~5-10 Тл) холловская проводимость квантуется. Они исследовали гетероструктуры на основе GaAs в сильных поперечных магнитных полях и при низких температурах (в жидком гелии при $T \sim 5$ К) и получали магнитосопротивление ρ_{xx} и холловское сопротивление ρ_{xy} как функции внешнего приложенного магнитного поля. Аккуратные измерения привели к поразительному результату: на обычном для эффекта Холла линейном ходе зависимости $\rho_{xy}(H)$ были обнаружены ступеньки (рис.2.1), высота которых оказалась равна $2\pi\hbar / e^2\mu$, $\mu = 1, 2, 3, \dots$, с относительной погрешностью не хуже 10^{-7} ! Положение плато зависело только от фундаментальных физических постоянных! Исходя из этого, авторы представили свою работу как новый прецизионный метод измерения важной в атомной физике физической величины – постоянной тонкой структуры $e^2 / \hbar c \approx 1/137$, так как скорость света c известна с большой точностью из независимых экспериментов ($c = 299792458$ м/с).

Этот эффект назвали целым квантовым эффектом Холла (IQHE), при этом ученым-первооткрывателям в 1985 г. была присуждена Нобелевская премия. Интересно, что фактически одновременно лауреаты Нобелевской премии 1998 г. (Штермер и Тсуи – за дробный квантовый эффект Холла – см. далее) также наблюдали это квантование, но не успели опубликовать результаты, и в ранних ссылках на IQHE упоминали как фон Клитцинга с соавторами, так и неопубликованную работу Штермера и Тсуи. Тем не менее все лавры в 1985 г. достались группе фон Клитцинга.

Заметим, что одновременное измерение магнито- сопротивления ρ_{xx} дает резкое уменьшение этой величины в точках реализации ступенек квантового эффекта Холла. Величина ρ_{xx} в этом случае исчезающе мала по сравнению со своим значением при нулевом магнитном поле (см. рис.2.1).

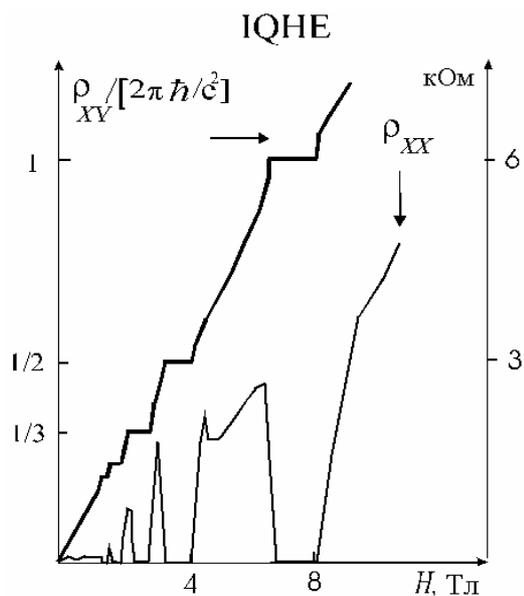
Теоретическое объяснение было дано буквально в следующем, 1981 году Р.В. Лафлиным на основе рассмотрения движения носителей заряда в структуре $Al_xGa_{1-x}As$ - GaAs как двумерных невзаимодействующих электронов, так как носители могут двигаться только в получающихся плоских квантовых ямах, поперек приложенного магнитного поля.

Лафлин учел, что энергия электронов в магнитном поле может принимать только дискретные значения, т.е. реализовываться только на так называемых уровнях Ландау. Он сразу использовал двумерную геометрию.

Получим явные выражения для энергии электрона в магнитном поле в более общем, трехмерном случае, решив стандартную задачу Шредингера, а затем уже перейдем к двумерной ситуации. Рассмотрим электрон в магнитном поле в геометрии ящика L_x, L_y, L_z с магнитным полем H по оси Z . Решим для него уравнение Шредингера следующего вида:

$$\hat{H}\psi = E\psi ; \quad \hat{H} = (1/2m)[(\hbar/i)\nabla - (e/c)\mathbf{A}]^2 .$$

Рис. 2.1.
Зависимость холловской проводимости ρ_{xy} и магнитосопротивления ρ_{xx} от напряженности магнитного поля в целом квантовом эффекте Холла



Подробности даны в задачах в конце параграфа, а здесь выпишем ответ для энергии и волновых функций:

$$\begin{aligned}
E_n(p_Z) &= \hbar\omega_C(n+1/2) + p_Z^2/2m; \\
\psi(x, y, z) &= \exp[(i/\hbar)(p_X x + p_Z z)]\phi(y); \\
\phi_n(y) &= \exp(-[y-y_0]^2/2l_H^2)H_n([y-y_0]/l_H); \\
l_H &= \sqrt{c\hbar/eH}.
\end{aligned}
\tag{2.1}$$

Величина l_H , как отмечалось в предыдущем параграфе, называется магнитной длиной и является масштабом пространственной локализации электрона в магнитном поле вместо классического радиуса Лармора. Уровни E_n называются уровнями (или подуровнями, подзонами) Ландау. Они эквидистантны и отстоят друг от друга на $\hbar\omega_C$.

Из решения (2.1) видим, что энергия j -го уровня Ландау в плоской геометрии (когда $p_Z=0$) имеет вид, похожий на энергию квантового осциллятора: $E_j = (j+1/2)\hbar\omega_C$, $j = 0, 1, 2, \dots$. Радиус орбиты (аналога радиуса Лармора в квантовом случае) электрона на j -м уровне Ландау растет с номером уровня: $r_j^2 = 2(j+1/2)l_H^2$ (см. задачу 2.2). Видно, что радиус орбиты для наинизшего уровня Ландау ($j=0$) точно равен магнитной длине.

Важная характеристика электронного газа – плотность состояний – величина, характеризующая заселенность разрешенных уровней энергии. Все физические величины (в том числе и проводимость) либо пропорциональны, либо являются монотонными функциями плотности состояний электронов вблизи уровня Ферми E_F – граничной энергии, отделяющей свободные состояния от занятых (по крайней мере, при низких температурах).

Плотность разрешенных состояний на каждом уровне Ландау (т.е. концентрация электронов, приходящаяся на единицу площади, которые могут находиться на одном уровне Ландау) (см. задачу 2.3) равна плотности квантов магнитного потока Φ , пронизывающего двумерный слой:

$$n_H = \Phi / \Phi_0 = eH / 2\pi\hbar c = 1 / 2\pi r_0^2, \tag{2.2}$$

где $\Phi_0 = \hbar c / 2e$ – квант магнитного потока. Из формулы (2.2) видно, что каждому состоянию, занятому на уровне Ландау, соответствует площадь, равная $2\pi r_0^2$.

Плотность состояний $N(E)$ двумерного электронного газа в поперечном магнитном поле имеет вид набора эквидистантных дельта-функциональных пиков, разнесенных по энергии на величину $\Delta E = \hbar\omega_c$ (см. задачу 2.3).

При наличии примесей рассеяние электронов размывает резкие пики в энергетические разрешенные зоны конечной ширины (рис.2.2). Легко видеть, что уменьшая или увеличивая магнитное поле, мы соответственно сближаем или раздвигаем зоны Ландау по энергии. При изменении концентрации носителей (или при фиксированном значении концентрации, но с изменением магнитного поля H) меняется положение уровня Ферми E_F – максимальной энергии, до которой заполнены электронами уровни (см. рис.2.2). Если E_F находится между двумя соседними зонами Ландау j и $j+1$, то все состояния на j -уровнях заполнены. Это соответствует, согласно (2.2), полной двумерной концентрации:

$$n = jn_H = jeH / 2\pi\hbar c = j / 2\pi l_H^2. \quad (2.3)$$

Соотношение (2.3) можно получить и из выражения для двумерной плотности состояний (решение задачи 2.7):

$$N(E) = \frac{L_X L_Y}{2\pi\hbar} \frac{eH}{c} \sum_{n=0}^{\infty} \delta[E - \hbar\omega_c (n + 1/2)].$$

Если подставить соотношение (2.3) в выражение для поперечного сопротивления ρ_{xy} (1.3) обычного эффекта Холла, получим

$$\rho_{xy} = 2\pi\hbar / e^2 \mu = 25812,808 \dots \text{Ом}/\mu, \quad \mu = 1, 2, 3, \dots \quad (2.4)$$

Эту величину (максимальное значение сопротивления плато) называют даже “1 Klitzing” ($2\pi\hbar / e^2 \sim 25$ кОм).

Оценим, сколько ступенек IQHE (уровней Ландау i) мы будем наблюдать в полях до 1 Тл. Если типичная двумерная концентрация $n = i/2\pi r_0^2$ порядка 10^{11} см^{-2} (соответственно, объемная концентрация порядка 10^{17} см^{-3}), при которой наблюдается квантовый Холл, а $r_0 = l_H \sim 100$ ангстрем, то $i \sim 1-5$.

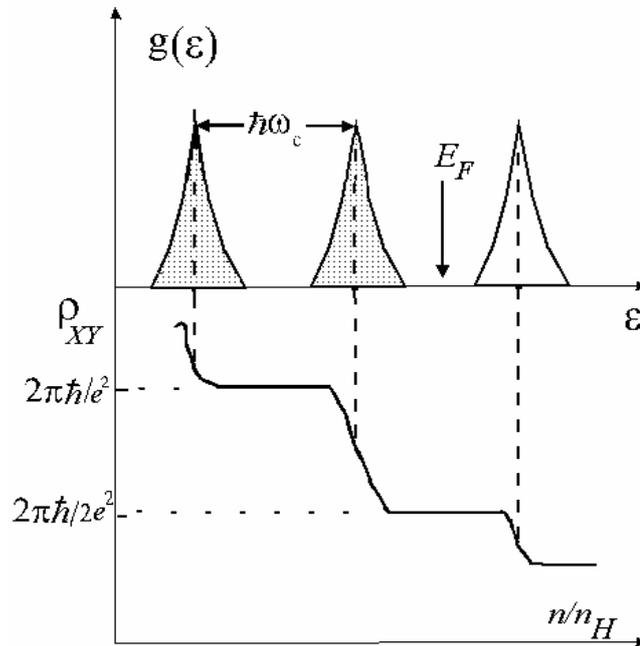


Рис.2.2. Плотность состояний $g(E)$ и поперечная проводимость ρ_{xy} как функции концентрации электронов n/n_H в целочисленном квантовом эффекте Холла. Области делокализованных носителей в плотности состояний соответствуют областям резкого изменения поперечной проводимости

Чтобы объяснить наблюдаемые экспериментально широкие плато ρ_{xy} и минимумы ρ_{xx} , вводится предположение о существовании на краях (“крыльях”) зон Ландау связанных состояний носителей заряда, не способных участвовать в электропроводности. То есть вся зона складывается как из локализованных (за счет примесей, кулоновского взаимодействия и других причин) состояний, не способных проводить ток в продольном направлении, так и из делока-

лизованных, способных переносить ток. Расчеты показывают (впервые эти вопросы с точки зрения рассеяния на хаотическом примесном потенциале были рассмотрены Ф. Андерсоном – и такая локализация называется андерсоновской), что почти вся зона заполнена локализованными носителями. При этом чем меньше размерность системы, тем меньше доля делокализованных состояний. Так что в чисто двумерном случае делокализованная область остается только в бесконечно узком пояске по энергии вблизи середины зоны Ландау (соответственно для образца конечной толщины поясок энергий с делокализованными носителями расширяется).

Серединам наблюдаемых ступенек (плато) холловской проводимости соответствует расположение уровня Ферми посередине между уровнями Ландау, а переходный участок между двумя плато соответствует нахождению E_F в центре уровня Ландау, т.е. в одном из максимумов плотности состояний (см. рис. 2.2). Переход от одной ступеньки к другой при уменьшении магнитного поля сопровождается “заливкой” электронами все новых зон Ландау.

Рассмотрим качественно поведение магнитосопротивления и холловского сопротивления при изменении концентрации в двумерном слое. Пусть E_F вначале располагается в (широкой) области локализованных состояний какого-нибудь j -го уровня (например, на верхнем, большем по энергии крыле зоны). Локализованные носители не участвуют в электропроводности. Делокализованные состояния, напротив, максимально заполнены и бездиссипативно проводят ток (поэтому $\rho_{XX} \rightarrow 0$), так как принцип Паули запрещает диссипативные переходы (все соседние по энергии состояния заняты локализованными носителями). Следует отметить, что последнее обстоятельство приводит также к условию $\sigma_{XX} > 0$, так как несложно показать связь компонент тензора сопротивления и проводимости:

$$\hat{\rho} = \begin{pmatrix} \rho_{XX} & -\rho_{XY} \\ \rho_{XY} & \rho_{XX} \end{pmatrix} \Rightarrow \hat{\sigma} = \hat{\rho}^{-1} \Rightarrow$$

$$\sigma_{XX} = \frac{\rho_{XX}}{\rho_{XX}^2 + \rho_{XY}^2}; \quad \sigma_{XY} = \frac{-\rho_{XY}}{\rho_{XX}^2 + \rho_{XY}^2}.$$

Таким образом, в нашей двумерной ситуации с исчезновением сопротивления исчезает и проводимость (и наоборот).

Так как все делокализованные состояния расположены по энергии ниже E_F , то концентрация носителей n в них максимальна (и равна $jeH / 2\pi\hbar c$), и ρ_{xy} имеет квантованное значение (2.4). При увеличении концентрации добавляемые в двумерный слой новые носители попадают в области локализованных носителей, пока уровень Ферми не попадет в делокализованную область. Концентрация делокализованных носителей при этом не изменяется и, следовательно, не изменяется значение ρ_{xy} . Так будет продолжаться до тех пор, пока E_F не выйдет за пределы области локализованных состояний и не попадет в область делокализованных состояний на $j+1$ уровень. При этом концентрация носителей в областях, занимаемых делокализованными состояниями, начнет изменяться в соответствии с изменением положения уровня Ферми, этому отвечает переходный участок между двумя соседними плато ρ_{xy} (см. рис. 2.2). Естественно, из-за изменения концентрации делокализованных носителей резко возрастет σ_{xx} (и ρ_{xx}). Таким образом, соотношение (2.4) выполняется в интервале энергий, равном щели в спектре делокализованных состояний. Именно локализованные состояния и играют роль своеобразного буфера (энергетической щели), разделяющего делокализованные состояния по энергии.

Так объясняется целочисленный квантовый эффект Холла (IQHE). Заметим, что из вышеизложенного следует, что увеличение концентрации примесей приводит к уширению плато IQHE (до известных пределов).

Что касается условий наблюдения квантового эффекта Холла, то это:

- 1) достаточно сильные магнитные поля (> 1 Тл), чтобы расстояние между соседними уровнями Ландау не перекрывалось их шириной, обусловленной примесями;
- 2) достаточно низкие температуры $kT \ll \hbar\omega_c \sim 1-5$ К, чтобы температурные флуктуации энергии также не “замазали” подуровни Ландау;

- 3) достаточно большая двумерная концентрация носителей ($>10^{10} \text{см}^{-2}$), соответствующая практически металлической проводимости инверсионного слоя;
- 4) существование двумерного в физическом смысле газа носителей заряда.

В последнее время интенсивно обсуждается возможность наблюдения IQHE в вихревой структуре высокотемпературных сверхпроводников (ВТСП). При больших полях могут выполняться условия наблюдения IQHE для двумерных вихрей (флюксоидов) в качестве “носителей заряда”, и может проквантоваться, например, намагниченность (J. Dziarmaga, 1996).

Задачи

Задача 2.1. Найти энергии и волновые функции электрона в магнитном поле (задача об уровнях Ландау) в периодическом “ящике” L_x, L_y, L_z .

Решение: Уравнение Шредингера:

$$\hat{H}\psi = E\psi; \quad \hat{H} = (1/2m)[(\hbar/i)\nabla - (e/c)\mathbf{A}]^2.$$

Выберем калибровку $\mathbf{A} = (-Hy, 0, 0)$, $\mathbf{H} = (0, 0, H)$. Если учесть, что оператор Гамильтона коммутирует с p_x, p_z ,

$$[\hat{H}, \hat{p}_x] = 0; [\hat{H}, \hat{p}_z] = 0; p_x = \text{const}, p_z = \text{const},$$

волновую функцию ищем в виде:

$$\psi(x, y, z) = \exp[(i/\hbar)(p_x x + p_z z)]\varphi(y).$$

Подставляя ее в уравнение Шредингера, после некоторых преобразований имеем уравнение:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\varphi}{dy^2} + \frac{m}{2} \omega_c^2 (y - y_0)^2 \varphi = (E - p_z^2 / 2m)\varphi,$$

где $\omega_c = eH / mc$, $y_0 = -p_x c / eH$. Это уравнение гармонического осциллятора с известным решением – полиномами Эрмита H_n , и известным спектром. Если ввести обозначения:

$$z = (y - y_0) / l_H; \quad \lambda = 2[E - p_z^2 / 2m] / \hbar\omega_c,$$

то получаем уравнение на модифицированные многочлены Эрмита:

$$\varphi'' + (\lambda - z^2)\varphi = 0,$$

решения которого выражаются через полиномами Эрмита:

$$\lambda_n = 2n + 1; \quad \varphi_n(z) = H_n(z) \exp[-z^2 / 2],$$

$$H_0(z) = 1, \quad H_1(z) = 2z, \quad H_2(z) = 4z^2 - 2, \quad H_3(z) = 8z^3 - 12z, \dots$$

Окончательно выписываем:

$$E_n(p_z) = \hbar\omega_c(n + 1/2) + p_z^2 / 2m,$$

$$\varphi_n(y) = \varphi_n^0 \exp(-[y - y_0]^2 / 2l_H^2) H_n([y - y_0] / l_H), \quad l_H = \sqrt{\hbar / eH}.$$

Для модифицированных многочленов Эрмита имеет место условие ортогональности:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_n(z) \varphi_m(z) dz = 2^n n! \sqrt{\pi} \delta_{n,m}.$$

Нормировка на единицу приводит к следующему значению для предэкспоненциального множителя:

$$\varphi_n^0 = \left[\pi^{1/4} l_H^{1/2} \sqrt{2^n n!} \right]^{-1}.$$

Задача 2.2. Показать, что квадрат радиуса прецессии электрона в поперечном магнитному полю направлении, т.е. среднее вида $\langle x^2 + y^2 \rangle$, для n -го уровня Ландау равен $2(n+1/2)l_H^2$.

Задача 2.3. Найти плотность состояний идеального электронного газа в магнитном поле.

Решение. Согласно определению плотности состояний запишем:

$$N(E) = \sum_{\gamma} \delta(E - E_{\gamma}) = 2 \frac{L_x}{2\pi\hbar} \int dp_x \frac{L_z}{2\pi\hbar} \int dp_z \sum_{n=0}^{\infty} \delta(E - E_n(p_z)).$$

Заметим, что поскольку электрон находится в магнитном поле, его энергия квантована (возникают уровни Ландау, см. задачу 2.1), вместо интегрирования в фазовом пространстве (y, p_y) необходимо суммирование по квантовым числам n . Результаты из решения задачи 2.1 позволяют определить максимальное значение импульса p_x : $|p_x| < eHL_y/c$ (из определения сдвига координат y_0). Тогда можно интеграл по p_x взять, и имеем окончательно:

$$N(E) = \frac{2V}{(2\pi\hbar)^2} \frac{eH}{c} \int_{-\infty}^{\infty} dp_z \sum_{n=0}^{\infty} \delta(E - p_z^2/2m - \hbar\omega_c(n+1/2)).$$

Интегрирование дает

$$N(E) = \frac{2V}{(2\pi\hbar)^2} \frac{eH}{c} \sqrt{2m} \sum_{n=0}^N [E - \hbar\omega_c(n+1/2)]^{-1/2},$$

где $N = (E/\hbar\omega_c - 1/2)$. В точках $E = \hbar\omega_c(n+1/2)$ плотность состояний имеет особенности – корневые расходимости. Их высота и расстояние между ними определяется величиной магнитного поля.

При слабом поле мы видим на “пьедестале” $N(E) \sim \sqrt{E}$ слабые периодические всплески осцилляций (де-Гааза-ван-Альфена). Нарисовать плотность состояний как функция E и H .

Задача 2.4. Получить в пределе поля H , стремящегося к нулю, обычную плотность состояний.

Решение:

$$\sum_{n=0}^N [E - \hbar\omega_c(n+1/2)]^{-1/2}, \quad N(E) = Vm\sqrt{2mE} / \pi^2 \hbar^3,$$

$$N|_{H \rightarrow 0} \cong \int_0^{E/\hbar\omega_c - 1/2} dx \{E - \hbar\omega_c(x+1/2)\}^{-1/2} = 2\sqrt{E} / \hbar\omega_c.$$

Задача 2.5. Для заданной энергии Ферми E_F найти период осцилляций плотности состояний как функцию обратного магнитного поля.

Ответ:

$$\frac{1}{H_n} = \frac{\hbar e(n+1/2)}{cmE_F}, \quad \Delta\left(\frac{1}{H}\right) = \frac{\hbar e}{cmE_F}.$$

Задача 2.6. Получить период осцилляций для блоховских электронов.

Решение: результат получим двумя способами.

1. Обобщим предыдущее выражение, учтя, что для блоховских электронов на месте m стоит циклотронная масса:

$$m_C = \frac{1}{2\pi} \frac{dS}{d\varepsilon}, \quad \frac{1}{H_n} = \frac{2\pi \hbar e(n+1/2)}{cE_F dS/d\varepsilon}.$$

Учитывая, что характерный масштаб изменения площади орбиты – E_F , то есть он много больше, чем разница между подзонами Ландау ($E_F \sim 10$ эВ, $\hbar\omega_c \sim 10^{-4}$ эВ), с высокой точностью можно положить, что $E_F dS/d\varepsilon \sim S$. Окончательно получаем:

$$H_n^{-1} = 2\pi \hbar e(n+1/2) / cS(E).$$

2. Заменим массу в энергии электрона циклотронной массой, и напишем разницу энергий n и $n+1$ орбиты:

$$E_{n+1} - E_n = 2\pi e\hbar H (cdS / d\varepsilon)^{-1}.$$

Отсюда, учитывая, что производную можно с высокой точностью ($E_F \gg \hbar\omega_c$) записать как

$$dS / d\varepsilon = [S(E_{n+1}) - S(E_n)] / [E_{n+1} - E_n],$$

получаем

$$S(E_{n+1}) - S(E_n) = 2\pi e\hbar H c^{-1}$$

или

$$S(E_{n+1}) = (n + \text{const}) 2\pi e\hbar H c^{-1}.$$

Отсюда можно получить выражение для периода осцилляций:

$$\Delta\left(\frac{1}{H}\right) = \frac{2\pi\hbar e}{c[S(E) - S_0]},$$

где $S_0 = \text{const} 2\pi e\hbar H c^{-1}$ – площадь нулевой ($n = 0$) орбиты.

Задача 2.7. Найти плотность состояний в двумерном случае, если магнитное поле направлено перпендикулярно к плоскости системы, и поле достаточно сильное, так что фактически спины электронов направлены по полю.

Решение: Следует убрать из задачи импульс p_z и все интегрирования по нему, тогда плотность состояний будет иметь вид

$$N(E) = \frac{L_x L_y}{2\pi\hbar} \frac{eH}{c} \sum_{n=0}^{\infty} \delta(E - \hbar\omega_c(n + 1/2)).$$

Получился набор эквидистантных дельта-пикув. На практике при-меси размазывают пики в зоны (нарисовать).

Задача 2.8. Сколько электронов вмещает один уровень Ландау и какова концентрация электронов через i – число занятых уровней.

Ответ:

$$N_1 = \frac{L_X L_Y}{2\pi\hbar} \frac{eH}{c}, \quad n = \frac{1}{2\pi\hbar} \frac{eH}{c} i = \frac{i}{2\pi l_H^2}.$$

Задача 2.9. Найти сопротивление Холла $\rho_{XY} = R_H H$ в случае, если полностью заполнено i уровней Ландау.

Ответ:

$$R_H = 1/nec, \quad \rho_{XY} = H/nec = 2\pi\hbar/(e^2 i) = 25812.808 \text{ Ом}/i.$$

На самом деле концентрация n задана, и число занятых уровней есть функция магнитного поля $i(H) = n2\pi\hbar c/eH$. На практике откладывают ρ_{XY} от H и видят ступеньки, соответствующие переходу от одного подуровня Ландау к другому.

3. Дробный квантовый эффект Холла. История открытия и современное состояние эксперимента. Система уровней в первой зоне Ландау. Лафлиновская жидкость как новое состояние двумерного электронного газа. Возбуждения с дробным зарядом

Дальнейшее развитие технологии позволило сделать гетероструктуры на основе арсенида галлия с периодом (поперечным размером, равным размеру одной потенциальной ямы) $d < 100$ ангстрем, что позволило исследовать двумерный электронный газ при магнитных полях $H > 10$ Тл. Это, в свою очередь, позволяет исследовать концентрацию $n < 1/2\pi l_H^2$, т.е. когда не залита даже первая зона Ландау ($n \sim 10^{11} \text{ см}^{-2}$).

В 1982 г. Д.С. Тсуи, Х.Л. Штермер и А.С. Госсард обнаружили, что при заполнении $\mu = 2\pi l_H^2 n = 1/3$, т.е. “заливке” ровно 1/3 первой зоны Ландау на зависимости $\rho_{XY}(H)$ имеется плато, причем ве-

личина $\rho_{xy} = 2\pi\hbar / e^2 \mu$ при $\mu = 1/3$! Наблюдалось это на структуре GaAs - Al_{0.3}Ga_{0.7}As при полях $H \sim 10$ Тл, при гелиевых температурах ($T = 5$ К), причем двумерная плотность электронов $n > 10^{11}$ см⁻². Это было совершенно непонятно, так как никакого квантования внутри первой зоны Ландау вроде быть не должно. Однако в дальнейшем эти результаты подтвердились (D. Yoshioka, P.A. Lee, 1983 г.). После предсказания Лафлиным (см. ниже) наблюдения этот эффект (названного *дробным квантовым эффектом Холла* – FQHE) и при других факторах заполнения $\mu = 1/5, 1/7$, он действительно наблюдался при $\mu = 1/5$, а позднее, после расширения Холдейном (1983 г.) иерархии чисел заполнения, и при $\mu = 1/7, 2/7, 1/3, 2/3, 4/3, 5/3, 7/3, 2/9, 2/11...$ (рис.3.1), (например, H.V. Jiang, R.L. Willett, H.L. Stormer, D.C. Tsui (1990 г.) – FQHE при $\mu = 1/5, 1/7, 2/7, 1/3, 2/3, 2/9$; V.J. Goldman, J.K. Wang, Bo Su, M. Hajegai (1993 г.) – FQHE при $\mu = 2/5, 1/3, 2/7, 3/11, 2/9, 1/5$). Одновременно было отмечено, что магнитосопротивление ρ_{xx} очень мало при реализации ступенек FQHE (см. рис.3.1), при этом температурную зависимость можно качественно описать в виде $\rho_{xx} \sim \exp(-\Delta/T)$, где $\Delta \sim 5$ К (так, H.V. Jiang, R.L. Willett, H.L. Stormer, D.C. Tsui (1990 г.) наблюдали это при $\mu = 1/5$). Кроме того, в последнее время экспериментаторы видят рост с температурой этой величины вблизи $\mu = 1/3, 1/5$ (так называемый активационный закон $\rho_{xx} \sim \exp(E_g/T)$, где E_g порядка 1 К – энергия активации).

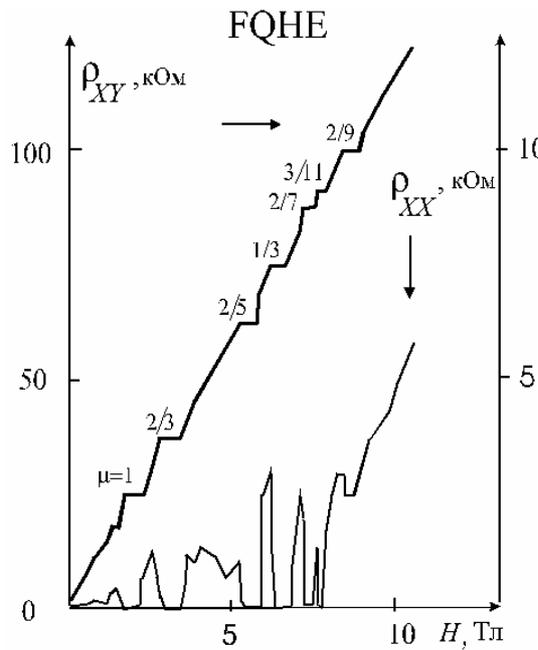


Рис.3.1.
Поперечная проводимость ρ_{XY} и магнитосопротивление ρ_{XX} в дробном квантовом эффекте Холла

Такое необычное поведение двумерной электронной системы в сильном магнитном поле не осталось без внимания теоретиков. В 1983 г. Р.В. Лафлин предположил, что описать электроны в двумерном слое в условиях неполной заливки уровня Ландау нельзя без учета кулоновского взаимодействия между ними. Он показал, что вследствие сильного кулоновского отталкивания они образуют несжимаемую квантовую жидкость – *жидкость Лафлина*. Он построил вариационную волновую функцию электронов и показал формальную аналогию между этой системой и однокомпонентной двумерной плазмой, в которой взаимодействие между заряженными частицами описывается потенциалом, логарифмически зависящим от расстояния между частицами. Так как к этому времени плазменные модели были подробно изучены, Лафлин воспользовался известными результатами и сформулировал условие минимума энергии такой системы. Оказалось, что минимум достигается при факторе заполнения $\mu = 1/m$, где m – нечетное (нечетность – из-за антисимметрии волновой функции электронов). Позже Холдейн расширил иерархию чисел заполнения, при которых наблю-

дается FQHE, так что этот эффект может реализоваться при $\mu = p/m$, p – целое, m – нечетное (а также при $\mu = 1 - p/m$ из-за электрон-дырочной симметрии). Легко видеть, что все упомянутые выше экспериментально наблюдаемые факторы заполнения FQHE не противоречат этим соотношениям.

Для того чтобы понять, как происходит такое своеобразное квантование внутри первой зоны Ландау, рассмотрим в двумерном случае электрон в сильном поперечном магнитном поле. В этом случае более удобно выбрать не тороидальную (периодический “ящик” $L_x \times L_y \times L_z$), а цилиндрическую геометрию. Векторный потенциал можно выбрать в следующем виде (симметричная калибровка для поля $\mathbf{H} = (0, 0, H)$):

$$A_\rho = A_z = 0, \quad A_\phi = H\rho/2. \quad (3.1)$$

Представляя оператор Гамильтона

$$\hat{H} = (1/2m^*)[(\hbar/i)\nabla - (e/c)\mathbf{A}]^2$$

в цилиндрических координатах, что наилучшим образом отвечает рассматриваемой геометрии системы (подробности приведены в задаче 3.1 в конце параграфа), ищем решение уравнения Шредингера в виде

$$\psi(\rho, \phi, z) = R(\rho) \exp[ik_z z + im\phi].$$

Так же, как и при выводе уровней Ландау, сохраняется поперечный импульс и, кроме того, угловой момент m – квантовое число, символизирующее свойства симметрии волновой функции относительно вращения вокруг оси Z .

В результате решения задачи 3.1 получаем волновую функцию, которая оказывается вырожденной гипергеометрической функцией, а условия ограниченности решения на бесконечности приводят к выражению, определяющему спектр электрона:

$$E_{nm}(k_Z) = \hbar\omega_c(n + |m|/2 - m/2 + 1/2) + \hbar^2 k_Z^2 / 2m^*. \quad (3.2)$$

Здесь n – номер зоны Ландау. Таким образом, кроме обычного квантования по зонам Ландау имеет место квантование по угловому моменту m . Более того, согласно (3.2), энергия вырождена при неотрицательных $m = 0, 1, 2, \dots$ (при $m < 0$ значения энергии просто совпадают со значениями энергии уровней Ландау, только с квантовым числом $n + |m|$). Таким образом, в каждой зоне Ландау с определенным значением n имеется бесконечный набор вырожденных энергетических уровней m с энергией, совпадающей с обычной энергией уровня Ландау: $E_{nm}(k_Z) = \hbar\omega_c(n + 1/2) + \hbar^2 k_Z^2 / 2m^*$. Учитывая точное решение в виде гипергеометрической функции, для первой зоны Ландау ($n = 0$) можно получить (см. задачу 3.1) явный вид волновых функций:

$$|m\rangle = \psi_m(z) = \frac{z^m}{\sqrt{2\pi 2^m m!}} \exp\left(-\frac{|z|^2}{4}\right), \quad (3.3)$$

где $z = (x + iy) / l_H$ и x, y отвечают координатам электрона (здесь введена безразмерная комплексная координата z , отсчитываемая в единицах магнитной длины l_H). Таким образом, мы видим, что электрон локализован в пространстве, имеющем линейный размер магнитной длины (точнее, квадрат радиуса орбиты $\langle \rho^2 \rangle = \langle x^2 + y^2 \rangle$ равен $2(m+1)l_H^2$ (см. задачу 3.3)).

Выше была рассмотрена одноэлектронная задача. Переходя к более реальной ситуации, Лафлин рассмотрел двумерный электронный газ в (x, y) плоскости, находящийся в поперечном магнитном поле, определяемым векторным потенциалом (3.1). Соответствующий гамильтониан такой системы имеет вид:

$$\hat{H} = \sum_j \left\{ \frac{1}{2m^*} \left| \frac{\hbar}{i} \nabla_j - \frac{e}{c} \mathbf{A}_j \right|^2 + V(\mathbf{r}_j) \right\} + \sum_{j>k} \frac{e^2}{|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_k|}, \quad (3.4)$$

где индексы j, k пробегают по всем N электронам, а V – потенциал однородного нейтрализующего фона. Точно решить такую задачу невозможно. Поэтому Лафлин предложил изучать рассматриваемую систему вариационным методом. Вид вариационной волновой функции он предложил в так называемом джастровском (Jastrow) представлении в виде произведения по парам частиц:

$$\psi = \left\{ \prod_{j < k} f(z_j - z_k) \right\} \exp \left[-\frac{1}{4} \sum_{i=1}^N |z_i|^2 \right], \quad (3.5)$$

где $z = (x + iy)/l_H$, и экспонента в (3.5) отражает асимптотическое поведение точной одночастичной функции (3.3) в первой зоне Ландау. Явный вид пока не известной функции $f(z)$ можно определить из следующих соображений. Вид одночастичной функции (3.3) указывает на то, что функция $f(z)$ не может быть ничем иным, как конечным полиномом по z . Затем, из условия антисимметрии волновой функции заключаем, что $f(z)$ должна быть нечетна. Далее, условия сохранения полного углового момента M требуют, чтобы весь предэкспоненциальный множитель в (3.5) был однородным полиномом степени M . Если собственный угловой момент электрона на нижнем уровне Ландау – m , то полный угловой момент N электронов можно выразить как $M = (1/2)mN(N-1)$. Иначе, это можно пояснить следующим образом. Если у нас есть N электронов в первой зоне Ландау, то в однородном (как увидим далее – жидком) состоянии они заполняют равномерно снизу зону и занимают в соответствии с принципом Паули первые N -орбиталей (от $m = 0$ до $m = N-1$). Если же средняя плотность $1/m$, то полный момент в m раз больше. Таким образом, полный момент дается выражением

$$M = m \sum_{i=0}^{N-1} i \langle n_i \rangle = m(N-1)N/2.$$

В итоге, единственное представление функции $f(z)$, удовлетворяющее перечисленным выше свойствам, может быть только $f(z)=z^m$. Окончательно волновая функция имеет вид:

$$\Psi_m(z_1, \dots, z_N) = \left\{ \prod_{j < k} (z_j - z_k)^m \right\} \exp \left[-\frac{1}{4} \sum_{i=1}^N |z_i|^2 \right], \quad (3.6)$$

при этом m – нечетное число.

Фактически получена вариационная волновая функция многоэлектронной двумерной взаимодействующей системы с единственным параметром m , который следует получить из минимума энергии. Для определения, какое же значение m минимизирует энергию, положим, что ансамбль волновых функций (3.6) как функций координат частиц – переменных z_j , определяется распределением Гиббса с некоторой фиктивной температурой, т.е. сконструируем аналог классического действия по следующему соотношению, записав квадрат модуля волновой функции в виде (см. ниже задачу 3.5):

$$|\Psi_m|^2 = \exp(-\beta \Phi).$$

Здесь Φ – энергия системы, соответствующая распределению частиц по координатам в состоянии Ψ_m . Полагая $\beta = 1/m$ в роли обратной температуры, находим выражение для Φ :

$$\Phi = - \sum_{j > k} 2m^2 \ln |z_j - z_k| + \frac{1}{2} m \sum_j |z_j|^2. \quad (3.7)$$

Выражение (3.7) – энергия системы N тождественных частиц на плоскости, имеющих заряд $e^* = m$ и взаимодействующих друг с другом кулоновским отталкивающим потенциалом:

$$v(z_j - z_k) = -2e^{*2} \ln |z_j - z_k|.$$

(Это справедливо в плоской геометрии – см. задачу 3.7.) Кроме того, последний член в (3.7) – взаимодействие этих частиц с однородным нейтрализующим фоном с поверхностной плотностью $\sigma = 1/2\pi l_H^2$ (см. задачу 3.6 в конце параграфа).

Лафлин отмечает, что в качестве выражения (3.7) мы получили энергию классической однокомпонентной плазмы в двумерном пространстве, где кулоновское взаимодействие описывается логарифмическим потенциалом. К моменту написания статьи (1983 г.) эта система была хорошо изучена в связи с интенсивным развитием работ по управляемому термоядерному синтезу. Численные расчеты (методом Монте-Карло) надежно установили, что такая система является жидкостью при $m < 70$ и гексагональным кристаллом в противном случае.

Таким образом, при $m < 70$ плотность электронов однородна и должна быть равна зарядовой плотности нейтрализующего фона, деленной на величину фиктивного заряда плазменных частиц, т.е. $n = \sigma/e^* = 1/(2\pi m l_H^2)$. Последнее означает, что в соответствии с соотношением (2.3) такое жидкое электронное состояние реализуется при факторе заполнения $\mu = 1/m$, где $m = 3, 5, 7, \dots$

Лафлин проверил численно на системе из трех и четырех частиц, насколько вариационная волновая функция (3.6) близка к точной и нашел, что относительная погрешность не более 0.05 для $m = 3, 5$. Кроме того, было показано, что основное состояние (3.6) имеет более низкую энергию, чем энергия кристаллического состояния – диэлектрика в данном случае. Независимые последующие численные расчеты (метод точной диагонализации на сфере для 7-12 частиц) подтвердили иерархию чисел заполнения Лафлина и Холдейна. Так, Грос и Макдональд (Gros and MacDonald, 1990 г.) получили фактор заполнения $\mu = n/2n+1$, $n = 0, 1, 2, \dots$ для 12-ти частиц на сфере.

Следует заметить, что в 1998 г. произошло давно ожидаемое событие, логически венчающее это новое направление в современной физике конденсированного вещества – Нобелевская премия по физике присуждена профессору Стэнфордского университета Роберту Лафлину (Robert B. Laughlin), профессору Колумбийского университета Хорсту Штермеру (Horst L. Stormer) и профессору Принстонского университета Дэниэлу Тсуи (Daniel C. Tsui) за от-

крытие и объяснение дробного квантового эффекта Холла. Точнее, согласно официальной формулировке, – за ”открытие нового типа квантовой жидкости с дробным зарядом элементарных возбуждений”.

Жидкость Лафлина оказалась новым квантовым состоянием двумерной взаимодействующей системы. Специфическая особенность состояния Лафлина – элементарные возбуждения в ней могут иметь дробный заряд. Так, Лафлин предложил рассмотреть следующую ситуацию для построения возбужденного состояния: в какой-либо точке плоскости z_0 вносится перпендикулярно к ней бесконечный тонкий соленоид и через него адиабатически медленно пропускается единичный квант магнитного потока $\Phi_0 = 2\pi\hbar c / e$. Соответствующую добавку в векторный потенциал можно найти из калибровочного сдвига фазы волновой функции, что просто приведет к увеличению на единицу углового момента в одночастичной волновой функции:

$$(z - z_0)^m \exp[-1/4 |z|^2] \Rightarrow (z - z_0)^{m+1} \exp[-1/4 |z|^2].$$

Соответственно, вариационная волновая функция (3.6) должна быть переписана в виде $\psi_m^{+z_0} = A_{Z_0} \psi_m$, т.е.:

$$\psi_m^{+z_0} = \left\{ \prod_i (z_i - z_0) \prod_{j < k} (z_j - z_k)^m \right\} \exp \left[-\frac{1}{4} \sum_{i=1}^N |z_i|^2 \right]. \quad (3.8)$$

Эта волновая функция соответствует элементарному возбуждению, которое называют “квазиэлектрон”. Аналогично можно ввести элементарное возбуждение – “квазидырку”, описываемую волновой функцией $\psi_m^{-z_0} = A_{Z_0}^* \psi_m$. Лафлин проверил эти волновые функции, спроектировав их на точные волновые функции первых возбужденных состояний из численного анализа четырех частиц и получил относительное отклонение не более 0,005! Позднее, в 1986 г. Фано и др. провели численные расчеты методом точной диагона-

лизации на сфере и диске и полностью подтвердили вид возбужденных состояний (3.8) при факторах заполнения $\mu = 1/3, 1/5$.

Полученные элементарные возбуждения являются частицами с зарядом $e^* = e/m$. Это можно показать, построив из их волновой функции классическое действие по формуле $|\psi_m^{+z_0}|^2 = \exp(-\beta\Phi')$, $\beta = 1/m$. Тогда, подставив (3.8), находим:

$$\Phi' = \Phi - 2m \sum_i \ln |z - z_0|, \quad (3.9)$$

где Φ – действие (3.7) в отсутствие возбуждения. Получившееся выражение (3.9) описывает взаимодействие однокомпонентной плазмы заряженных частиц (с зарядом $e^* = m$) с точечным зарядом, находящимся в точке z_0 . Плазма будет экранировать этот заряд, создавая равный по величине и противоположный по знаку заряд вокруг z_0 . Видно из (3.9), что в точке z_0 имеем единичный заряд (а не m). Однако следует вспомнить, что реально действие (3.7), (3.9) описывает не гипотетические частицы с зарядом $e^* = m$, а электроны с зарядом e , и только по аналогии мы сопоставляем реальную и “плазменную” системы. Соответственно рассматриваемое возбуждение относительно реальных электронов будет иметь дробный заряд $e^* = e/m$.

Таким образом, Лафлин предсказал элементарные возбуждения с дробным зарядом! Следует заметить, что буквально за год до этого Вилчек (Wilczek, 1982 г.) рассмотрел теоретически квантовую статистику частиц в двумерном пространстве. Он показал, что кроме бозе- и ферми- варианта в двумерном пространстве существует и дробная статистика, когда волновая функция приобретает комплексный фазовый множитель при перестановке двух частиц (их называют не бозонами или фермионами, а *энионами (anyon)*). Такая энионная статистика занимает промежуточное положение между бозе- и ферми-статистиками, которые просто отвечают, соответственно, предельным фазам 0 и π . Самое интересное, что в работе Вилчека гипотетически рассматривались составные квазича-

стицы, представляющие собой заряженные частицы, вращающиеся вокруг трубок магнитного потока (см. также задачу 3.6). А в случае дробного квантового эффекта Холла уже вполне реальные возбуждения, как показывает Лафлин, эти квазичастицы имеют дробный заряд e/m , и по терминологии Вилчека подчиняются $1/m$ -дробной статистике, и действуют так, как если бы они были бозонами (либо фермионами), сцепленными с магнитным потоком $\Phi = \Phi_0/m$.

Именно основываясь на таком представлении, Холдейн (Haldane, 1983 г.) и Гальперин (Halperin, 1984 г.) предсказали значение дробей в иерархии дробных квантовых состояний. Так, было предсказано, что FQHE-эффект может реализоваться при $\mu = p/m$, p – целое, m – нечетное (а также при $\mu = 1 - p/m$ из-за электрон-дырочной симметрии). Приведем также более общее выражение для фактора заполнения “сателлитных”, или “дочерних” состояний:

$$\mu = \frac{1}{m + \frac{\alpha_1}{p_1 + \frac{\alpha_2}{\dots + \frac{\alpha_n}{p_n}}}}; \quad m = 1,3,5;\dots; \alpha_i = \pm 1; \quad p_i = 2,4,6.$$

Однозначной информации об экспериментальном проявлении дробного заряда носителей до последнего времени не было. Так, первые указания на экспериментально наблюдаемые возбуждения в FQHE, имеющие дробный заряд, появилось еще в 1993 г. (см., например, Goldman V.J. et al, 1993 г.). Однако данные были противоречивы, имели большую погрешность, и допускали альтернативное объяснение.

В 1997 г. ситуация изменилась. В сентябре французским исследователям удалось представить убедительные доказательства наблюдения квазичастичных возбуждений с зарядом в три раза меньшем заряда электрона (L.Saminadayar, D.C.Glatti, Y.Lin and V.Etienne, 1997 г.) при факторе заполнения $1/3$. В стандартной холловской геометрии они исследовали гетероструктуры

GaAs/Ga(Al)As с двумерной электронной плотностью $\sim 10^{11} \text{ см}^{-2}$ в сильном поперечном магнитном поле $\sim 15 \text{ Тл}$ и сверхнизкой температуре ($0,13 - 0,15 \text{ К}$). Используя электронную литографию, ученым удалось изготовить туннельный холловский контакт шириной 275 нм . По достижении лафлиновского состояния при заполнении $1/3$, которое тестировалось по соответствующей ступеньке на холловской проводимости, измерялся туннельный ток через контакт и его флуктуации (шум). Согласно соотношениям Шотки, отношение амплитуды коротковолнового шума туннельного тока к величине самого тока напрямую зависит от заряда туннелирующих квазичастиц. Экспериментаторы наблюдали зависимость этой физической величины от тока через контакт и по наклону кривой определили заряд возбуждений $e^* = e/3$, что полностью соответствует теоретическим предсказаниям Лафлина. Таким образом, описанная выше работа является первым убедительным доказательством экспериментального наблюдения возбуждений с дробным зарядом в физике конденсированных сред. Сообщения о наблюдении элементарных возбуждений, характеризующихся дробным зарядом, подтверждаются и другими исследователями (В. Daviss, 1998 г., G. P. Collins, 1997 г.).

Квазичастицы, “квазидырка” и “квазиэлектрон” локализованы в области пространства размером порядка магнитной длины. Конечный размер позволяет оценить энергию, необходимую для создания таких квазичастиц. Пользуясь аналогией с плазмой и исходя из энергии экранирования плазмой единичного заряда, Лафлин оценил энергетическую щель в спектре, которая стандартно высчитывается из следующей разности:

$$\Delta = E(\Psi_m^{+z_0}) + E(\Psi_m^{-z_0}) - 2E(\Psi_m).$$

Оценки дают $\Delta \sim e^2/\epsilon m^2 l_H \sim 4\text{-}5 \text{ К}$ при поле $\sim 10 \text{ Тл}$, $m = 3, 5$, $\epsilon \sim 10$ (диэлектрическая константа) и подтверждаются точными численными расчетами.

Таким образом, основное состояние жидкости Лафлина отделено от возбужденного состояния конечной энергетической щелью. Соответственно конечная щель говорит о том, что эта жидкость несжимаема, и оценки энергетической щели Δ вполне соответствуют эксперименту. Напомним, что наблюдаемое поведение маг-

нитосопротивления отвечает закону $\rho_{xx} \sim \exp(-\Delta/T)$. Лафлиновское состояние обладает специфическим дальним порядком, чем-то напоминающим сверхпроводящее состояние. Величина энергетической щели Δ играет практически ту же роль в теории лафлиновской жидкости, что и модуль параметра порядка в сверхпроводниках. Наличие конечной энергетической щели приводит к почти идеальной проводимости электронов в лафлиновском состоянии (так что сопротивление, в соответствии с экспериментом, экспоненциально стремится к нулю, как и в целом квантовом эффекте Холла). Более того, собственно ступеньки дробного квантового эффекта Холла более четко отслеживаются именно по резкому уменьшению величины ρ_{xx} (см. рис.3.1).

Причину несжимаемости в данном конкретном случае можно проиллюстрировать следующим: любое сжатие или расширение равносильно инжектированию квазичастиц. При этом изменение энергии квадратично по приращению векторного потенциала $\delta E \sim (\delta A)^2$, т.е. необходима значительная флуктуация поля для возбуждения системы путем расширения или сжатия. Несжимаемость вызывает специфические продольные коллективные возбуждения (в отсутствие звуковой волны растяжения-сжатия), имеющие энергию порядка Δ в длинноволновом пределе. Они и реализуют проводимость без резистивных потерь при нулевой температуре. Ситуация такая же, как и в случае полностью заполненной зоны Ландау ($m=1$) для IQHE, когда похожие коллективные возбуждения имеют место при энергии $\hbar\omega_c$.

Еще одно полезное сравнение по поводу отклика системы в лафлиновском состоянии на силы сжатия. Он такой же, как на приложенное магнитное поле в сверхпроводниках второго рода. Известно, что сверхпроводники второго рода в магнитном поле, меньшем некоторого первого критического H_{c1} , полностью выталкивают внешнее поле из своего объема (так называемый эффект Мейсснера). При поле, большем H_{c1} , ситуация несколько иная – магнитное поле проникает в сверхпроводник, причем через области нормальной фазы, окруженные экранирующими вихревыми токами, направленными против внешнего поля – так называемые вихри Абрикосова – флюксоиды. В случае лафлиновского состояния ситуация подобная: сначала система генерирует холловские

токи без сжатия, затем при критическом сжатии коллапсирует в квантовый объем $m2\pi l_H^2$ (макроскопическая капля). Это подобие вихря (как в сверхпроводниках второго рода) окружено циркулирующим холловским током, направленным против сжатия.

Собственно для объяснения ступенек FQHE следует опять учесть естественные примеси и неоднородности, имеющие место в реальных полупроводниковых гетероструктурах. Фактически они здесь играют ту же роль, что и в теории IQHE. “Электронные” и “дырочные” квазичастичные зоны, разделенные в чистом, беспри-месном случае энергетической щелью 2Δ , уширены в континуум, состоящий из двух зон возбужденных состояний, разделенных зоной локализованных состояний, захватывающих “крылья” зон. Пока уровень Ферми в области локализации, новые частицы при его вариациях захватываются примесными уровнями. При этом холловская проводимость реализуется при $\sigma = e^2 / 2\pi m \hbar$. Как только уровень Ферми проходит через область делокализованных состояний, происходит переход до следующего состояния Лафлина, и возрастают резистивные потери (ρ_{xx}). Отметим, что при увеличении m (что эквивалентно по фактору заполнения либо $\mu \rightarrow 0$, либо $\mu \rightarrow 1 (1 - p/m)$) уменьшается энергетическая щель, и FQHE проявляется все слабее.

Интересно, что электронный газ в условиях дробного квантового эффекта Холла в принципе должен совершенно по иному реагировать на изменение концентрации примесей, чем целочисленный. Если в целочисленном эффекте возрастание концентрации примесей в известных пределах уширяет плато на полевой зависимости холловского сопротивления, то в дробном эффекте увеличение концентрации примеси может уменьшить ширину плато, так как конечная щель в спектре возбуждений 2Δ не будет замазываться примесями только при условии, что время столкновений $\tau > \hbar / \Delta$. Когда количество примесей увеличивается, щель между основным, локализованным на примесях, и делокализованными, квазичастичными состояниями уменьшается. При наличии вигнеровской кристаллизации (см. далее) вблизи плато можно ожидать нелинейную зависимость ширины плато от концентрации, так как локализация

электронов за счет кулоновского “запирания” может разрушаться примесями.

Задачи

Задача 3.1. Рассчитать волновые функции и спектр уединенного электрона в постоянном магнитном поле.

Решение. Выбираем цилиндрические координаты ρ, ϕ, z . Векторный потенциал при направлении магнитного поля вдоль оси z представим в следующем виде в симметричной лоренцевской калибровке:

$$A_\rho = A_z = 0, \quad A_\phi = H/2(-y, x) = H\rho/2.$$

Расписываем действие оператора Гамильтона на волновую функцию в цилиндрической геометрии

$$\begin{aligned} \hat{H}\psi &= (1/2m^*)[\nabla - (e/c)\mathbf{A}]^2\psi = \\ &= \frac{\nabla^2}{2m^*}\psi + \frac{e^2}{2m^*c^2}\mathbf{A}^2\psi - \frac{e}{2m^*c}(\mathbf{A}\nabla\psi + \nabla\mathbf{A}\psi), \end{aligned}$$

где оператор импульса записан в следующей форме

$$\nabla = \frac{\hbar}{i} \left(\frac{\partial}{\partial \rho} \mathbf{i}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \phi} \mathbf{i}_\phi + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{i}_z \right).$$

Таким образом, действие гамильтониана на волновую функцию записывается как

$$\hat{H}\psi = -\frac{\hbar^2}{2m^*} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial z^2} \psi + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \psi \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \psi \right\} + \frac{e^2 H^2}{8m^* c^2} \rho^2 \psi + \frac{ieH\hbar}{2m^* c} \frac{\partial}{\partial \varphi} \psi.$$

Далее, ищем решение уравнения Шредингера в виде:

$$\psi(\rho, \varphi, z) = R(\rho) \exp(ik_z z + im\varphi).$$

Подставляя это выражение в уравнение $\hat{H}\psi = E\psi$, получим после алгебраических преобразований для радиальной части следующее уравнение:

$$\frac{\partial^2 R}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial R}{\partial \rho} - \frac{m^2}{\rho^2} R - \gamma^2 \rho^2 R + 2m\gamma R = -\beta R,$$

$$\gamma = eH/2\hbar c = 1/2l_H^2, \quad \beta = 2m^* E/\hbar^2 - k_z^2.$$

Потом проводим перенормировку радиальной переменной на магнитную длину, и вводим безразмерный параметр $\xi = \gamma\rho^2$, тогда уравнение (после некоторых преобразований) принимает вид:

$$\xi \frac{\partial^2 R}{\partial \xi^2} + \frac{\partial R}{\partial \xi} + \left(\lambda - \frac{\xi}{4} - \frac{m^2}{4\xi} \right) R = 0,$$

$$\lambda = \beta/4\gamma + m/2.$$

Несложно видеть прямо из последнего уравнения асимптоты решения:

$$R(\xi) \sim \begin{cases} \exp[-\xi/2], & \xi \rightarrow \infty; \\ \xi^{|m|/2}, & \xi \rightarrow 0. \end{cases}$$

Ищем решение в виде $R(\xi) = W(\xi) \exp(-\xi/2) \xi^{|m|/2}$, где на функцию W следует наложить условия ограниченности в нуле и на бес-

конечности. В итоге после преобразований получаем окончательное уравнение:

$$\xi W'' + (|m| + 1 - \xi)W' + [\lambda - (|m| + 1)/2]W = 0.$$

Полученное дифференциальное уравнение – типичное уравнение для вырожденной гипергеометрической функции (функции Кумера):

$$W(\xi) = {}_1F_1\left(-\lambda + \frac{|m| + 1}{2}, |m| + 1, \xi\right).$$

Ограничение решения на бесконечности требует, чтобы выполнялось соотношение: $n = \lambda - (|m| + 1)/2$, $n = 0, 1, 2, \dots$. Тогда гипергеометрическая функция превращается в конечный полином. Последнее и есть искомый спектр, который после восстановления исходных обозначений принимает вид:

$$E_{nm}(k_Z) = \hbar\omega_c(n + |m|/2 - m/2 + 1/2) + \hbar^2 k_Z^2 / 2m^*.$$

Задача 3.2. Получить волновые функции в первой зоне Ландау для электрона в плоской геометрии.

Решение. Учитывая точное решение в виде вырожденной гипергеометрической функции (задача 3.1), для первой зоны Ландау ($n = 0$) получаем, что функция Кумера $W(\xi) = {}_1F_1(n = 0, |m| + 1, \xi)$ точно равна единице. Следовательно, полная волновая функция имеет вид

$$\begin{aligned}\psi(\rho, \varphi, z) &= R(\rho) \exp[ik_Z z + im\varphi] = \\ &= \exp[ik_Z z + im\varphi - \xi/2] \xi^{|m|/2}.\end{aligned}$$

В плоской геометрии $k_Z = 0$, и можно переписать следующим образом (только при неотрицательных m):

$$\Psi_m(z) = \frac{z^m}{\sqrt{2\pi 2^m m!}} \exp\left(-\frac{|z|^2}{4}\right), \quad z = (x + iy)/l_H.$$

Окончательно, нормируя интеграл от квадрата модуля волновой функции по всей комплексной плоскости Z на единицу, имеем

$$\Psi_m(z) = \frac{z^m}{\sqrt{2\pi 2^m m!}} \exp\left(-\frac{|z|^2}{4}\right).$$

Задача 3.3. Показать, что квадрат радиуса прецессии электрона в первой зоне Ландау, т.е. $\langle x^2 + y^2 \rangle$, для m -го орбитального момента равен $2(m+1)l_H^2$.

Задача 3.4. Получить вид кулоновского отталкивательного потенциала для взаимодействия зарядов e^* в чисто двумерной ситуации.

Решение: На плоскости принято вводить комплексный потенциал: $v(z) = \phi(x,y) - iA(x,y)$, $z = x + iy$. Несложно показать, что

$$dv(z)/dz = -E_X + iE_Y.$$

Пусть двумерный заряд e^* представляет собой заряд единицы длины бесконечной заряженной прямой нити (это как раз чисто двумерная ситуация), пронизывающей плоскость x,y . Тогда напряженность поля в полярных координатах ρ, ϕ дается формулами: $E_\rho = 2e^*/\rho$, $E_\phi = 0$. Используя эти выражения, можно найти, что $v(z) = -2e^* \ln z = -2e^* \ln \rho - 2ie^* \phi$. Тогда для энергии взаимодействия двух зарядов в точках z_j, z_k на плоскости (только действительная часть) имеем

$$e^* v(z_j - z_k) = -2e^{*2} \ln |z_j - z_k|.$$

Задача 3.5. Показать, что энергия системы Φ , которую следует минимизировать в случае пробной волновой функции Ψ_m , подчиняется соотношению: $|\Psi_m|^2 = \exp(-\beta\Phi)$ при $\beta \rightarrow \infty$, ($T \rightarrow 0$).

Решение: следует вспомнить, что для минимизации энергии системы с учетом температуры следует записать:

$$\langle \Phi \rangle = (1/Z) \int \Phi \exp(-\beta \Phi) dV.$$

С другой стороны, для вариационной функции при температуре, стремящейся к нулю, необходимо минимизировать выражение средней энергии системы:

$$\langle \Phi \rangle = (1/Z) \int \Psi_m^* \Phi \Psi_m dV.$$

Сравнивая их, доказываем искомое соотношение.

Задача 3.6. Показать, что последний член в классическом действии (3.7) есть взаимодействие частиц зарядом $e^* = m$ с однородным нейтрализующим фоном с поверхностной плотностью $\sigma = 1/2\pi l_H^2$.

Решение. Рассмотрим второе слагаемое в выражении (3.7). Потенциал $\varphi(r)$ однородного поверхностного слоя с плотностью заряда σ есть $\varphi(r) = 2\pi \int \sigma r dr = \pi r^2 \sigma$. Тогда энергия взаимодействия записывается как

$$e^* \sum_j \varphi(r_j) = e^* \pi \sigma \sum_j |r_j|^2.$$

Сравнивая последнее соотношение с $(m/2) \sum_j |z_j|^2$, получаем

$\sigma = 1/2\pi$, и учитывая, что z нормировано на магнитную длину, имеем в размерном виде окончательно: $\sigma = 1/2\pi l_H^2$.

Задача 3.7. Получить преобразование волновой функции при внесении в систему заряженных частиц трубок магнитного потока с дробным квантом $\Phi = \mu \Phi_0$ (каждая связана с одной частицей) в двумерной геометрии (задача об энионной или дробной статистике).

Решение. В симметричной калибровке векторный потенциал $\mathbf{A}_\Phi(r)$, обусловленный одной трубкой магнитного потока (т.е. тонким бесконечным соленоидом), можно записать:

$$\mathbf{A}_\Phi(r) = \frac{\mu\Phi_0}{2\pi} \mathbf{i}_z \times \frac{\mathbf{r}}{r^2} = \frac{\mu\Phi_0}{2\pi} \nabla\phi,$$

где ϕ – полярный угол в x,y -плоскости. В системе многих частиц на выделенную i -частицу действует относительно остальных следующий потенциал:

$$\mathbf{A}_\Phi(r_i) = \frac{\mu\Phi_0}{2\pi} \mathbf{i}_z \times \sum_{j,j \neq i} \frac{\mathbf{r}_{ij}}{|\mathbf{r}_{ij}|^2} = \frac{\mu\Phi_0}{2\pi} \sum_{j,j \neq i} \nabla\varphi_{ij},$$

где $\varphi_{ij} = \arctg[(y_i - y_j)/(x_i - x_j)]$ – относительный фазовый сдвиг.

Рассмотрим гамильтониан системы при наличии такого векторного потенциала:

$$\hat{H} = \frac{1}{2m} \sum_i \left[\frac{\hbar}{i} \nabla_i - \frac{e}{c} \mathbf{A}_\Phi(r_i) \right]^2 + V(r_1, \dots, r_N).$$

Рассмотрим также уравнение Шредингера $\hat{H}\Psi = E\Psi$. С помощью градиентного преобразования вида

$$\mathbf{A}'_i = \mathbf{A}_i + \nabla\chi_i, \quad \chi_i = \frac{\mu\Phi_0}{2\pi} \sum_{j,j \neq i} \varphi_{ij}, \quad \Psi' = \Psi \exp\left(\frac{ie}{\hbar c} \chi\right)$$

убираем векторный потенциал из уравнения, при этом связь волновой функции без трубок магнитного потока и с ними имеет вид

$$\Psi' = \exp\left(i\mu \sum_{i,j,i < j} \varphi_{ij}\right) \Psi.$$

Таким образом, появляется фазовый множитель, который и символизирует дробную (энионную) статистику: при любой перестановке двух частиц он вносит свой вклад. В частном случае введения одной трубки магнитного потока мы немедленно получаем возбужденное состояние в лафлиновской жидкости.

4. Вигнеровская кристаллизация. Фазовые переходы “кристалл Вигнера – жидкость Лафлина”. Численное моделирование

Острые современных исследований дробного квантового эффекта Холла направлено еще на одно интересное явление – реализацию регулярной решетки из носителей заряда (в двумерном пространстве – плоской треугольной, гексагональной решетки). В начале 90-х годов прошлого века все более доказательно стали звучать слова о реализации вблизи FQHE этого нового состояния двумерного электронного газа – так называемого *кристалла Вигнера*. Впервые возможность такой вигнеровской кристаллизации в двумерной электронной системе в сильном магнитном поле еще в 1975 г. рассмотрели Е.Ю. Лозовик и В.И. Юдсон (и эту статью, опубликованную в журнале “Письма в ЖЭТФ”, обязательно цитируют сейчас, как только дело касается обсуждения вопросов кристаллизации Вигнера).

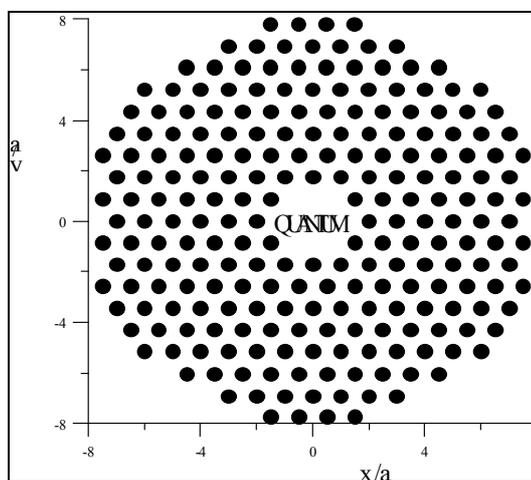
Дело в том, что как было упомянуто в начале предыдущего раздела, вблизи факторов заполнения $\mu = 1/3, 1/5$ (но вне реализации FQHE) экспериментально наблюдают резкое экспоненциальное повышение магнитосопротивления с возрастанием температуры (активационный закон) – можно говорить об этом явлении как о *диэлектризации* системы. Так, Жианг и др. (1990 г.) вблизи фактора заполнения $\mu = 1/5$ (а точнее, при $\mu = 0,19$ и $0,21$) наблюдали активационный закон вида $\rho_{xx} \sim \exp(E_g/T)$, причем энергия активации $E_g \sim 1$ К. Голдман с сотрудниками в 1990 г. получили такое поведение магнитосопротивления при $2/9 > \mu > 1/5$ и при $\mu < \sim 1/5$. Дорожкин и др. в 1992 г. экспериментально доказывают диэлектризацию при значении $\mu < 0,28$. Саджото с сотрудниками в 1993 г. наблюдают диэлектризацию около ступенек FQHE при $\mu = 1/5$ и $2/9$.

Фактически к настоящему моменту экспериментально установлено, что около факторов заполнения $\mu = 1/3$ и $1/5$ имеет место активационный закон магнитосопротивления ρ_{xx} . Это косвенно сви-

детельствует о диэлектризации системы, о локализации электронов и реализации регулярной решетки из носителей заряда.

В принципе, соображения, приводящие к возможности локализации (впервые рассмотренные Лозовиком и Юдсоном), достаточно очевидны: при усилении магнитного поля магнитная длина l_H – масштаб пространственной локализации волновой функции электрона в присутствии магнитного поля уменьшается. Таким образом, при своем движении вокруг линий магнитного потока носители заряда все более сжимают радиус «витков» (если пользоваться классической аналогией движения) и имеют определенные в пространстве координаты. При наличии сильного кулоновского отталкивания мы имеем газ практически классических частиц в двумерном пространстве, которые могут выстроиться в регулярную плоскую треугольную структуру для минимизации энергии, “запирая” себя в точках равновесия (рис. 4.1). Действительно, как было показано, двумерная концентрация электронов определяется формулой $n = \mu/2\pi l_H^2$. С другой стороны, в треугольной плоской решетке с периодом a имеем из геометрических соображений $n = 2/3^{1/2} a^{-2}$. Отсюда получаем соотношение:

Рис. 4.1
Классическая треугольная решетка – вигнеровский кристалл



$$\left(\frac{a}{l_H}\right)^2 = \frac{4\pi}{\sqrt{3}\mu}. \quad (4.1)$$

Усиливая поле, мы уменьшаем μ , и эффективно увеличиваем период a . Физические размеры электрона (вернее, электронного “блина”), определяемые величиной магнитной длины l_H , уменьшаются (относительно их расстояния друг от друга a), и они все более локализуются. Такая структура – диэлектрик, с характерной энергией активации $E_g \sim 1-5$ К, как и наблюдается на эксперименте. Заметим, что E_g оказывается близкой по порядку величины характерным значениям энергии кулоновского взаимодействия в нашей двумерной задаче $\sim e^2/(\epsilon l_H)$, где ϵ – диэлектрическая постоянная. Если учесть, что в GaAs $\epsilon \sim 13$, имеем масштаб $< \sim 10^{-3}$ эВ (в магнитном поле порядка 1-5 Тл).

Следует подчеркнуть, что точное теоретическое обоснование вигнеровской кристаллизации – очень непростая задача. Какие-либо аналитические оценки в сильновзаимодействующем электронном газе проблематичны из-за отсутствия параметров малости и невозможности использования теории возмущений. В последнее время развитие компьютерного моделирования привело к возможности численного анализа ограниченных низкоразмерных систем. Расчеты методом Монте-Карло и точной диагонализации гамильтоновой матрицы в двумерной взаимодействующей электронной системе проводятся на конечных (10 – 30 электронов) кластерах в различной геометрии. Рассчитывают энергию, волновые функции и различные корреляционные взаимодействия. Задачу для таких малых систем можно решить точно, без использования каких-либо приближений.

Кратко приведем результаты некоторых наиболее характерных численных исследований по вигнеровской кристаллизации. Так, Лам и Гирвин (Lam, Girvin, 1984 г.) в приближении Хартри–Фока рассчитали методом Монте-Карло вблизи $\mu = 1/3, 1/5$ энергии вигнеровского кристалла (WC) и лафлиновской жидкости (LL). Сопоставление этих энергий приводит к выводу о возможности кристаллизации при $\mu < 1/5$ (энергия ниже). Прайс, Плацман и Хе (Price, Platzman, He, 1993 г.) провели вариационные расчеты Мон-

те-Карло и показали переход в кристалл около $\mu = 1/3, 1/5, 1/7$. Также Плацман и Прайс (Platzman, Price, 1993 г.) в приближенном подходе проанализировали переход по температуре из LL в WC, т.е. отогрев и замораживание системы при $\mu = 1/3$ и $1/5$. В этой работе была построена фазовая диаграмма на плоскости T_c – параметр r_s (напрямую связанный с плотностью электронного газа через соотношения $n = 1/2\pi a_b^2 r_s^2 \Rightarrow r_s^2 = \mu l_H^2/a_b^2$), показывающая области реализации жидкости и кристалла. Зу и Лойе (Zhu, Louie, 1984 г.) вариационным методом Монте-Карло сравнили энергию состояний WC и LL. При пересечении по величине поля фактора заполнения $\mu = 1/5$ они наблюдали переход WC-LL-WC.

Следует отметить, что приближенные вариационные расчеты (например, Зу и Лойе, и т.п.) не позволяют достоверно отличить эти состояния, так как жидкость Лафлина имеет плотность, близкую к кристаллической фазе, и энергии состояний WC и LL сравнимы. С другой стороны, наиболее успешный известный точный численный расчет (Gros and MacDonald, 1990 г. – метод точной диагонализации) был проведен не на плоскости, а на сфере с $N = 12$ частицами и на $m = 25$ орбиталях. Однако без сомнения оптимальная электронная конфигурация в вигнеровском кристалле должна иметь гексагональную (плоскую) элементарную ячейку. Отсюда число частиц в системе должно быть близко к 7, 13 и т.д. для адекватного описания состояния WC (см., например, Кашурников, Прокофьев, Свистунов и Тупицин, 1996 г.). Эти значения принципиально нельзя реализовать на сфере.

Для того чтобы были более понятны проблемы современного компьютерного эксперимента, кратко продемонстрируем некоторые особенности и сложность численного “эксперимента” при исследовании проблемы вигнеровской кристаллизации, а также физические критерии, необходимые при изучении фазовых переходов “жидкость-кристалл”.

Рассмотрим двумерный ферми-газ с кулоновским взаимодействием, т.е. модель (3.4), как предлагал Лафлин. Численно решать такую систему можно, перейдя от координатного представления в какой-нибудь дискретный базис. Поэтому следует переписать гамильтониан (3.4) в представлении вторичного квантования по наи-

более адекватному задаче полному базису волновых функций. Как показано выше, в сильном магнитном поле (имеет смысл выбрать только одну ориентацию спина, т.е. бесспиновую ситуацию – все спины частиц направлены по полю) имеется хорошее квантовое число – угловой момент m в первой зоне Ландау. Поэтому удобно полный ортонормированный базис выбрать по соответствующим одночастичным состояниям электрона в этой зоне $|m\rangle$ (3.3).

Учитывая только кулоновское взаимодействие между частицами, можно переписать гамильтониан ферми-газа в этом базисе следующим образом:

$$H = \sum_{m,m',m'',m'''} V_{m,m',m'',m'''} a_m^+ a_{m'}^+ a_{m''} a_{m'''} \quad (4.2)$$

где a_m^+ – оператор рождения электрона в состоянии (на орбитали) $|m\rangle$; $V_{m,m',m'',m'''} – матричный элемент кулоновского взаимодействия в двумерном случае (о расчете матричного элемента и его явный вид см. задачу 4.2). Для гамильтониана (4.2) выполняется закон сохранения углового момента $m + m' = m'' + m'''$. Так как мы интересуемся переходом “кристалл-жидкость”, то упростим задачу и расположим исходно частицы в классическую треугольную решетку (см. рис.4.1) с узлами, помещенными на наинизшую нулевую орбиталь ($m = 0$) в состоянии $\Psi(Z_j) = \Psi_{m=0}(z - Z_j)$ в позиции Z_j , соответствующие узлам решетки, т.е. как бы «замораживаем» частицы. Период такого вигнеровского кристалла a выражается через электронную плотность n_e и фактор заполнения орбиталей $\mu = 2\pi l_H^2 n_e$ определяется в соответствии с соотношением (4.1). Далее все расстояния будем исчислять в магнитных длинах, а все энергетические величины – в единицах $e^2/(\epsilon l_H)$, ϵ – диэлектрическая постоянная. Важно, что, меняя период, мы можем в данной схеме менять фактор заполнения в соответствии с приложенным магнитным полем.$

Для точного квантово-механического расчета мы должны “разморозить” центральную частицу, затем первую координационную сферу (еще шесть частиц), и если позволили бы возможности компьютера, то и следующую (еще шесть) и т.д., и для них точно ре-

шить уравнение Шредингера. Однако число орбит в выражении (4.2) должно быть ограничено из физических соображений и из ограничений компьютерной памяти и быстродействия. Мы должны добиться такой ситуации, чтобы последующее увеличение максимального значения орбиты не меняло существенно их заполнения. Это, к сожалению, можно проверить только непосредственно в расчете. Такие оценки дают то, что уже при учете двух координационных сфер (число частиц $N = 13$) для расчета с фактором заполнения $1/5$ (или 40 для $\mu = 1/3$) необходимо приблизительно 65 орбит. Это приводит к размеру гильбертова пространства (и, соответственно, необходимой для диагонализации гамильтоновой матрице), недостижимому для используемого здесь метода точной диагонализации.

Поясним здесь кратко суть метода точной диагонализации применительно к нашей задаче. Нам необходимо найти энергию и волновые функции гамильтониана (4.2), т.е. решить уравнение Шредингера, причем точно, но для ограниченной системы. Здесь ограниченность достигается конечным числом орбиталей m и числа электронов N , заполняющих эти орбитали. Таким образом, для полного перебора всех возможных состояний системы мы должны расположить N электронов на m орбиталях всеми возможными способами с учетом тождественности. Легко понять, что таких вариантов C_m^N . Это и есть размер гильбертова пространства. Далее, рассчитываются все матричные элементы перехода из одного состояния в другие за счет действия оператора (4.2) и строится гамильтонова матрица. Задача сводится к диагонализации этой матрицы (т.е. представлении ее в диагональном виде, что есть переход к собственно энергетическому базису). Получающиеся при этом собственные числа и вектора есть искомый энергетический спектр и волновые функции (разложенные по исходному базису $|m\rangle$). Однако размер гамильтоновой матрицы сильно растет с увеличением m и N . Так, при числе орбиталей $m = 25$ и числе электронов $N = 7$ размер матрицы равен уже 480700. Поэтому приходится ограничить расчет первой ячейкой вигнеровского кристалла и семью частицами, но для них квантовую задачу решить точно. Итак, выделяем семь электронов с $Z_j = 0$ и $Z_j = a$ и рассматриваем для них полную квантовую задачу (4.2), удерживая другие электроны в со-

стоянии с $m = 0$ и оставляя взаимодействие их с первыми семью частицами в соответствии с (4.2) (см. рис.4.1). “Замороженная” треугольная решетка стабилизирует задачу, является как бы “средним полем” для квантовой задачи, исследуемой в пределах первой координационной сферы, и допускает возможность вигнеровской кристаллизации. В принципе, уже первой координационной сферы достаточно, чтобы фиксировать переход от корреляций в кристалле, локализованных на масштабе периода решетки, к более длинноволновым корреляциям в жидкости Лафлина. Отметим, что обычно радиус круга, вырезанного из бесконечной плоскости для “среднего поля”, выбирался размером около 100 периодов решетки, так что граничные условия уже не влияли на результаты.

Для семи электронов выбиралась тридцать одна орбиталь ($m = 0-30$), их число подбиралось из условия, что числа заполнения $\langle n_m \rangle$, определяющие вероятность нахождения электрона в состоянии с орбитальным моментом m , не изменяются (с относительной точностью 0,001) при увеличении числа орбит, и следующие состояния (с $m > 30$) не заполнены с этой же точностью. Даже в этом случае размер гамильтоновой матрицы (т.е. гильбертова пространства) равен $2629575 \times 2629575!$ Кроме того, из-за кулоновского дальнего действия (все взаимодействует со всем) гамильтонова матрица является более плотной, чем в стандартных узельных задачах (модели Хаббарда, t - J , Бозе–Хаббард, спиновые и т.д.), что усложняет ее хранение в памяти компьютера и обработку.

Итак, для численного анализа диагонализировалась матрица следующего гамильтониана, имеющая линейный размер более 2.5 миллионов:

$$H = \sum_{m,m',m'',m'''} V_{m,m',m'',m'''} a_m^+ a_{m'}^+ a_{m''} a_{m'''} + \sum_m V_m^{(MF)} a_m^+ a_m, \quad (4.3)$$

где $V_m^{(MF)}$ – стабилизирующее “среднее поле” внешних “замороженных” электронов (его расчет – самостоятельная задача). В общем случае оно не симметрично, и вызывает переходы с изменением момента у внутренних электронов на $\Delta m = \pm 6n$, где n – целое

(это происходит из-за симметрии треугольной решетки). Очевидно, что эта корреляция выгодна для “кристаллического” состояния центрального кластера. Чтобы обойти эту проблему, и не облегчать системе кристаллизацию, мы игнорируем все переходы, кроме $\Delta m = 0$. Такая процедура эквивалентна усреднению по углам относительно вращения стабилизирующего потенциала вокруг центрального кластера, в итоге система сохраняет полный момент, и можно пользоваться этим инвариантом при расчете.

Чтобы не утомлять читателя целым набором проблем, связанных с особенностями точной диагонализации данной очень сложной задачи (стоит лишь отметить, что только “подготовительная” задача корректного суммирования матричных элементов (явный вид которых показан в задачах ниже) является самостоятельной нетривиальной проблемой, по сложности сопоставимой с самой диагонализацией), сразу перейдем к наиболее значимому результату расчета.

Наиболее адекватной величиной, позволяющей выявить различие между “твердым” и “жидким” состояниями в рассматриваемой системе, является парная корреляционная функция, т.е. вероятность нахождения электрона в точке z_1 при условии нахождения второго электрона в точке z_2 . Из соображений симметрии можно ожидать (по крайней мере для достаточно малого фактора заполнения), что одна частица будет расположена в центре кластера, а остальные шесть частиц будут иметь максимум плотности распределения на расстоянии примерно $a(\mu)$, т.е. на первой координационной сфере. Состояние этих электронов существенно зависит от угла θ между координатами частиц на первой координационной сфере. Тогда адекватную парную корреляционную функцию определим следующим образом:

$$g_\alpha(\theta) = \langle \alpha | \Psi^+(z_1) \Psi^+(z_2) \Psi(z_2) \Psi(z_1) | \alpha \rangle, \quad |z_1| = |z_2| = a, \quad (4.4)$$

где $\theta = \arg(z_1) - \arg(z_2)$ варьируется в интервале $(0, \pi)$, $|\alpha\rangle$ – основное состояние, полученное из точной диагонализации. В твердом состоянии, обладающим дальним порядком, следует ожидать три хорошо определенные осцилляции $g(\theta)$, в то время как в жидкой фазе, имеющей только ближний порядок, эти колебания долж-

ны быть сильно подавлены. В любом случае резкое (скачкообразное) изменение корреляционной функции основного состояния $g_G(\theta)$ в зависимости от фактора заполнения μ может служить критерием для перехода «жидкость-твердое тело».

Так, представим на рис.4.2 корреляционную функцию $g(\theta)$, рассчитанную для критического значения фактора заполнения μ_M , для которого момент M_G резко меняется. При изменении момента $M_G = 45 \rightarrow 51 \rightarrow 57$ в парной корреляционной функции скачкообразно увеличиваются амплитуды осцилляций. Это свидетельствует об установлении в системе более строгого упорядочения, присущего твердому телу, хотя фактор заполнения еще слишком большой для ожидаемого WC состояния в макроскопической системе.

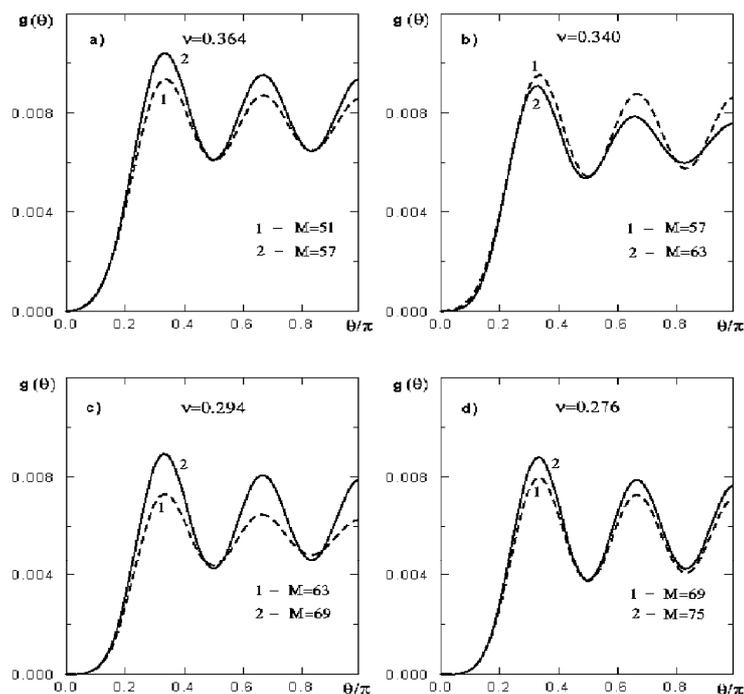


Рис. 4.2. Парная корреляционная функция $g(\theta)$ для основного состояния в точках резкого изменения осцилляций, соответствующих изменениям углового момента $51 \rightarrow 57, 57 \rightarrow 63, 63 \rightarrow 69, 69 \rightarrow 75$

На рис.4.3 показана относительная амплитуда осцилляций последнего (третьего) пика как функцию фактора заполнения для основного состояния. Видно, что в диапазоне $0,294 < \mu < 0,34$ осцилляции подавлены, что свидетельствует о жидкости Лафлина, а вне этого диапазона реализуется кристалл Вигнера.

Отметим также следующие важные факты. Нет сомнения в том, что точно при $\mu = 1/3$ основное состояние (GS) хорошо описывается LL, поэтому следует ожидать, что угловой момент GS будет равен $M_G(a(\mu = 1/3)) = N_e(N_e - 1)/\mu = 63$. Заранее этот факт в численную процедуру не был заложен. Результаты подтвердили, что угловой момент основного состояния действительно равен 63. Более того, обнаружилось, что $M_G = 5N_e(N_e - 1) = 105$ при заполнении $\mu = 0,198$ ($\sim 1/5$), как и должно быть в состоянии Лафлина. Также отметим, что разумность “среднеполевой” процедуры контроля плотности подтверждается тем, что при $\mu < 1/2$ положение максимума плотности частиц $\rho(R)$ совпадает с расстоянием до первой координационной сферы $a(\mu)$. Поэтому нет сомнения в адекватности подхода с физической точки зрения.

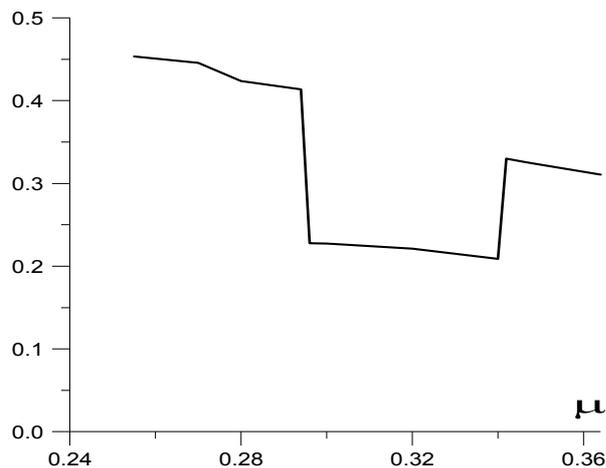


Рис.4.3. Относительная амплитуда осцилляций парной корреляционной функции

Окончательное резюме: результаты расчетов поддерживают экспериментальные данные и свидетельствуют о возможности вигнеровской кристаллизации вблизи факторов заполнения $\mu = 1/3, 1/5$. А точнее, продемонстрировано, что *вигнеровский кристалл* является основным состоянием при $\mu < 0,3$, кроме диапазона $0,294 < \mu < 0,34$ (включая $\mu = 1/3$), где *лафлиновская жидкость* существенно присутствует в структуре основного состояния. В принципе, на практике может наблюдаться целая цепочка фазовых переходов “вигнеровский кристалл – лафлиновская жидкость – вигнеровский кристалл...” при изменении магнитного поля и прохождении факторов заполнения через значения, где точно реализуются ступеньки FQHE.

Задачи

Задача 4.1. Каков размер гильбертова пространства, т.е. полное число состояний N электронов на m ($0-m$) орбиталях?

Ответ: C_{m+1}^N .

Задача 4.2. Получить явное выражение для матричного элемента кулоновского взаимодействия в базисе волновых функций первой зоны Ландау.

Ответ:

$$V_{m,m',m'',m'''} = \frac{(-1)^{m+m'}}{2^M \left(\prod_{i=1}^4 m_i!\right)^{1/2}} \sum_{k=0}^{\min(m,m')} \sum_{p=0}^{\min(m'',m''')} (-2)^{k+p} k! p! \times \\ \times C_k^m C_k^{m''} C_p^{m'} C_p^{m'''} I(M, k, p),$$

где входящий в это выражение интеграл $I(M, k, p)$ определен следующим образом:

$$I(M, k, p) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} V_c(q) q^{2M-2k-2p+1} \exp(-q^2) dq.$$

Здесь $M = m_1 + m_2$ – суммарный момент, $C_j^i = i!/(j!(i-j)!)$, и $V_c(q)$ – фурье-компонента потенциала двухчастичного взаимодействия. В двумерном пространстве для кулоновского взаимодействия $V_c(q) = 2\pi/q$, и матричные элементы можно точно представить как ряд:

$$\begin{aligned} V_{m,m',m'',m'''} &= \\ &= \frac{(-1)^{m+m'}}{2^M \left(\prod_{i=1}^4 m! \right)^{1/2}} \sum_{k=0}^{\min(m,m')} \sum_{p=0}^{\min(m'',m''')} (-4)^{k+p} [2(M-k-p)-1]! \times \\ &\quad \times C_k^m C_k^{m''} C_p^{m'} C_p^{m'''} . \end{aligned}$$

Задача 4.3. Получить предельные значения для матричных элементов “среднеполевого” потенциала на больших расстояниях.

Указание: следует рассмотреть общее выражение для энергии взаимодействия двух частиц i, j на большом расстоянии:

$$V_{ij} = \sum_{m_1 m_2 m_3 m_4} \int \Psi_{m_2}^*(r_i) \Psi_{m_1}^*(r_j) \frac{1}{|\mathbf{R} - \mathbf{r}_i + \mathbf{r}_j|} \Psi_{m_4}(r_j) \Psi_{m_3}(r_i) d^2 r_i d^2 r_j$$

и разложить его при больших R_{ij} .

Задача 4.4. Рассчитать взаимодействие “замороженной” решетки с внутренними электронами, запрещая переходы с несохранением моментов (только диагональные слагаемые).

Решение: Для построения “среднеполевого” стабилизирующего потенциала следует рассчитать диагональные матричные элементы для одного электрона, находящегося на орбите $|m\rangle$, и другого электрона, “замороженного” на орбите $\Psi_{m=0}(z-Z_j)$. После расчета получаем

$$V_m^{(MF)} = \sum_{j=2,3} V_m(Z_j),$$

где сумма подразумевается по всем координатам, начиная со второй координационной сферы, и

$$V_m(Z_j) = (-1/2)^m m! \sum_{k=0}^m \frac{(-2)^k}{k![(m-k)!]^2} \times \\ \times \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty V_c(q) q^{2m-2k-2p+1} \exp(-q^2) J_0(q |Z_j|) dq.$$

Здесь $J_0(q)$ – функция Бесселя. Последнее выражение можно также представить в виде ряда (самостоятельная задача).

Задача 4.5. Рассчитать предыдущую задачу в условиях несохранения суммарного момента и с учетом переходов между моментами внутренних электронов. Показать, что общий вид выражения будет

$$V^{(MF)} = \sum_{m_1 m_2} V_{m_1 m_2}^{(MF)} a_{m_1}^+ a_{m_2}$$

и реализовываться будут переходы с изменением момента на $\Delta m = m_1 - m_2 = \pm 6n$, где n – целое.

Задача 4.6. Получить явный вид волновой функции идеального вигнеровского кристалла для семи электронов на 31 орбите, разложенной по одночастичному базису $|m\rangle$.

Задача 4.7. Как можно построить волновую функцию лафлинговского состояния (3.6) в базисе $|m\rangle$, для семи электронов на три-

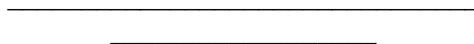
дцать одной орбите? (Указать последовательную процедуру для численного построения.)

Задача 4.8. Получить выражение для пространственной плотности ($|\Psi(x, y)|^2$) семи электронов на тридцать одной орбите через операторы рождения и уничтожения a_m^+ , a_m на орбиталях $|m\rangle$ и одночастичные волновые функции в первой зоне Ландау.

Задача 4.9. Выразить парную корреляционную функцию

$$g_\alpha(\theta) = \langle \alpha | \Psi^+(z_1) \Psi^+(z_2) \Psi(z_2) \Psi(z_1) | \alpha \rangle, \quad |z_1| = |z_2| = a$$

явно через операторы рождения и уничтожения a_m^+ , a_m в базисе $|m\rangle$.



СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Основная

1. Ашкрофт Н., Мермин Н. Физика твердого тела. В 2-х т. М.: Мир, 1979.
2. Киттель Ч. Введение в физику твердого тела. М.: Наука, 1978.
3. Маделунг О. Теория твердого тела. Т.1. М.: Наука, 1980.
4. Маделунг О. Физика твердого тела. Локализованные состояния. Т.2. М.: Наука, 1985.
5. Браут Р. Фазовые переходы. М.: Мир, 1967.
6. Займан Дж. Принципы теории твердого тела. М.: Мир, 1966.
7. Н.Б. Брандт, В.А. Кульбачинский. Квазичастицы в физике конденсированного состояния. М.: Физматлит, 2007.
8. Изюмов Ю.А., Скрябин Ю.Н. Термодинамика магнитоупорядоченных систем. М.: Наука, 1987.
9. Изюмов Ю.А., Кацнельсон М.И., Скрябин Ю.Н. Магнетизм коллективизированных электронов. М.: Физматлит, 1994.
10. Квантовый эффект Холла. Сб. статей., пер. с англ. /Под ред. Ю.В. Шмарцева, М.:Мир, 1986.
11. Гирвин С. Квантовый эффект Холла. Необычные возбуждения и нарушенные симметрии. Москва-Ижевск, Институт компьютерных исследований, 2003.
12. Физическая энциклопедия. /Под ред. А.М. Прохорова. М.: Советская энциклопедия, т.1. 1988, т.2. 1990, М.: Большая Российская энциклопедия, т.3, 1992, т.4., 1994, т.5., 1998.
13. Кашурников В.А., Красавин А.В. Современные проблемы физики твердого тела. Ч.2. Высокотемпературная сверхпроводимость. М.: МИФИ, 2002.
14. Кашурников В.А., Красавин А.В., Маймистов А.И., Карцев П.Ф. Сверхтекучесть и бозе-конденсация. М.: МИФИ, 2008.

Дополнительная

11. Klitzing K.V., Dorda G., and Pepper M. //Phys. Rev. Lett. 1980. V.45. P.494.
12. Laughlin R.B.//Phys.Rev. B. 1981 V.23. P.5632.
13. Tsui D.C., Stormer H.L., and C.Gossard A. //Phys. Rev. Lett. 1982. V.48. P.1559.
14. Laughlin R.B. //Phys.Rev.Lett. 1983. V.50. P.1395.
15. Haldane F.D.M. //Phys.Rev.Lett. 1983. V.51. P.605.
16. Quantum Hall Effect. / Eds. Prange R.E. and Girvin S.E. Springer Verlag, New York, 1990.
17. Goldman V.J., Wang, J.K., Su Bo, Hagegai M. //Phys. Rev. Lett. 1993. V.70. P.647.
18. Dziarmaga J. //Phys.Rev. B. 1996. V.53. P.6572.
19. Yochioka D. and Lee P.A. //Phys.Rev. B. 1983. V.27. P.4986.
20. Jiang H.V., Willett R.L., Stormer H.L., Tsui D.C. //Phys. Rev. Lett. 1990. V.65 P.633.
21. Goldman V.J., Wang J.K., Su Bo, Hajegai M. //Phys. Rev. Lett. 1993. V.70. P.647.

22. Wilczek F. //Phys.Rev. Lett, 1982. V.49. P.957.
23. Halperin B.I. //Phys.Rev.Lett, 1984. V.52. P.1583.
24. Goldman V.J., Wang J.K., and Su Bo. //Phys.Rev.Lett. 1993. V.70. P.647.
25. Saminadayar L., Glatti D.C., Lin Y., and Etienne B. //Phys. Rev. Lett. 1997. V.79. P.2526.
26. Daviss B. // New Scientist, January, 1998. P.36.
27. Collins G. P. //Physics Today. November, 1997. P.17.
28. Gros G., and MacDonald A.H. //Phys.Rev. B. 1990. V.42. P.9514.
29. Fano G., Ortolani F., Colombo E. //Phys.Rev. B. 1986. V.34. P.2670.
30. Goldman V.J., Santos M., Shayegau M., Gunningha J.E. //Phys.Rev.Lett. 1990. V.66. P.2189.
31. Дорожкин С.И., Шашкин А.А., Кравченко Г.В. и др., //Письма в ЖЭТФ. 1992. Т.57. С.55.
32. Sajoto T., Li Y.P., Endel L.W., Tsui D.C., Chauigau M. //Phys.Rev.Lett. 1993. V.70. P.2321.
33. Лозовик Ю.Е., Юдсон В.И. //Письма в ЖЭТФ. 1975. Т.22. С.26.
34. Lam K., Girvin S.M., //Phys.Rev. B. 1984. V.30. P.473.
35. Price R., Platzman P.M., and He S. //Phys.Rev.Lett. 1993. V.70. P.339.
36. Platzman P.M., Price R. //Phys.Rev.Lett. 1993. V.70. P.3487.
37. Kashurnikov V.A., Prokof'ev N.V., Svistunov B.V., and Tupitsyn I.S. //Phys. Rev. B. 1996. V.54. P.8644.
38. Лафлин Р.Б. Дробное квантование // УФН 2000. Т. 170. №3. С. 292-303
39. Штермер Х. Дробный квантовый эффект Холла // УФН Т. 170. №3. С. 304-319
40. Цуи Д. Соотношение беспорядка и взаимодействия в двумерном электронном газе, помещенном в сильное магнитное поле // УФН Т. 170. №3. С. 320-324.
41. Yennie D. R. Integral quantum Hall effect for nonspecialists // Rev.Mod.Phys. 1987. V. 59. №3. P. 781-824
42. Chang A. M. Chiral Luttinger liquids at the fractional quantum Hall edge // Rev.Mod.Phys. 2003. V. 75. №4. P. 1449-1505.

Кашурников Владимир Анатольевич
Маймистов Андрей Иванович

Современные проблемы
физики твердого тела

Часть 1
Целый и дробный квантовые эффекты Холла

Учебное пособие

Издание 2-е, дополненное

Редактор Шумакова Н.В.

Оригинал-макет изготовлен Маймистовым А.И.

Подписано в печать 25.04.2011 Формат 60x84 1/16.

Печ.л. 4,0 Уч.-изд.л. 4,0 Тираж экз.

Изд. № 041. Заказ №

Национальный исследовательский ядерный университет “МИФИ”
115409, Москва, Каширское ш., 31
Типография НИЯУ МИФИ.